ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 23 | August 1943 | Heft 4

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. W. Hantzsche: Die Prandtl-Glauertsche Näherung als Grundlage für ein Iterationsverfahren zur Berechnung kompressibler Unterschallströmungen	185
Fr. Schiel: Der durch Kapillarwirkung bedingte Zusammenhalt zweier benetzter Körper	200
W. Wunderlich: Zur Triebstockverzahnung	209
G. Kotowski: Lösungen der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung mit periodischer Störfunktion beliebiger Frequenz (mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzlösungen)	213
U. Graf: Affine Transformationen durch Doppel-Photographie	230
Kleine Mitteilungen. L. Collatz: Graphische Lösung von Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung	237
Buchbesprechungen. H. v. Sanden: Praxis der Differentialgleichungen, eine Einführung. — G. Kowalewski: Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. — K. Schwidefsky: Einführung in die Luft- und Erdbildmessung. — P. Werkmeister: Vermessungskunde III. Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Topographie. — Weiter eingegangene Bücher	239
Nachrichten	240

HAUPTAUFSÄTZE

Die Prandtl-Glauertsche Näherung als Grundlage für ein Iterationsverfahren zur Berechnung kompressibler Unterschallströmungen.

Von *W. Hantzsche* in Braunschweig.

(Aus dem Institut für Gasdynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring E. V., Braunschweig.)

Für ein Iterationsverfahren zur Berechnung der kompressiblen Strömung, das von der Prandtlschen Näherung für dünne Profile als erstem Schritt ausgeht, wird die dritte Näherung berechnet. Unter Verwendung der konformen Abbildung, die das Außengebiet des Profils in der nach Prandtl affin verzerrten Strömungsebene in das eines Kreises überführt, läßt sich die dabei zu integrierende inhomogene Differentialgleichung allgemein lösen. Für die Strömung um die nichtangestellte Ellipse und den nichtangestellten Kreisbogen wird die dritte Näherung vollständig angegeben und numerisch ausgewertet. Der Kompressibilitätseinfluß steigt gegenüber der zweiten Näherung noch weiter an.

Die Prandtl-Glauertsche Näherung für die kompressible Potentialströmung besteht in der Annahme kleiner Zusatzgeschwindigkeiten zu einer Parallelströmung als Grundströmung. Die dadurch erzielte Linearisierung der Differentialgleichung des Potentials bzw. der Stromfunktion einer adiabatischen Gasströmung gibt den Kompressibilitätseinfluß für dünne und flach angestellte Profile gut wieder. Auch für dickere Profile stellt die Prandtl-Glauertsche Linearisierung eine recht brauchbare erste Näherung dar. In einer früheren, gemeinsam mit H. Wendt verfaßten Arbeit[1]) wurde nun für die ebene Strömung eine Methode der sukzessiven Approximation für die Stromfunktion angegeben, die die Prandtl-Glauertsche Näherung als ersten Schritt hat. Wirklich durchgeführt ist dort aber nur der zweite Schritt. Die vorliegende Arbeit gilt der Berechnung des dritten.

Die Schwierigkeit bei der praktischen Durchführung von schrittweisen Näherungen besteht neben der Erfüllung der Randbedingungen in der Angabe des allgemeinen Integrals der bei jedem Schritt neu zu lösenden inhomogenen linearen Differentialgleichung. Bei der Behandlung des zweiten Schrittes konnten wir zeigen, daß sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung explizit angeben läßt, so daß nur noch die praktisch natürlich oft auch schwierige Befriedigung der Randbedingungen durch eine geeignete homogene Lösung nötig blieb. Die Behandlung der Differentialgleichung des dritten Schrittes zeigt nun, daß man

[1]) W. Hantzsche und H. Wendt: Der Kompressibilitätseinfluß für dünne wenig gekrümmte Profile bei Unterschallgeschwindigkeit. Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 72 (vgl. dort auch den Hinweis auf A. Busemann).

Lithoprinted by EDWARDS BROTHERS, INC. 1943 Published by J. W. EDWARDS, PUBLISHER, for Foreign Periodicals, Inc., Ann Arbor, Michigan, U.S.A.

XUM

auch hier die allgemeine Lösung angeben kann, wobei sich allerdings im Gegensatz zur zweiten Näherung von den auftretenden Quadraturen eine allgemein nicht explizit durchführen läßt. Sie stellt aber praktisch in vielen Fällen ein Integral über eine rationale Funktion dar.

Die dritte Näherung wird für die Schar nichtangestellter affin verzerrter Kreisbogen und die nichtangestellte Ellipse berechnet.

§ 1. Aufstellung und Transformation der Differentialgleichungen für die ersten drei Schritte.

Zur Herleitung der für die einzelnen Näherungsschritte gültigen Differentialgleichungen hatten wir für die auf ein kartesisches $x\,y$-Koordinatensystem bezogene Stromfunktion ψ einer ebenen adiabatischen Gasströmung um ein Profil eine Reihe in einem Parameter λ angesetzt, der die Abweichung der Profilform von der nichtangestellten Strecke charakterisiert[2]):

$$\frac{1}{U}\,\psi(x,y,\lambda) = -y + g(x,y)\,\lambda + h(x,y)\,\lambda^2 + f(x,y)\,\lambda^3 + \cdots \quad (1).$$

Dabei liegt die Anströmung U in Richtung der negativen x-Achse. Der Zusammenhang zwischen der Stromfunktion ψ und den Geschwindigkeitskomponenten u, v in Richtung der x- und y-Achse und der Dichte ϱ wird durch die Beziehungen:

$$\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\,u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \psi_y, \qquad -\frac{\varrho}{\varrho_\infty}\,v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \psi_x$$

vermittelt (ϱ_∞ Dichte im Unendlichen).

Geht man mit dem Ansatz (1) in die Differentialgleichung

$$\psi_{xx}\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right) - 2\,\psi_{xy}\,\frac{u\,v}{a^2} + \psi_{yy}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right) = 0$$

(a Schallgeschwindigkeit) der Stromfunktion einer adiabatischen rotationsfreien Gasströmung ein, so ergeben sich durch Nullsetzen der Koeffizienten von λ, λ^2 und λ^3 für die ersten drei Funktionen $g(x,y)$, $h(x,y)$ und $f(x,y)$ der Reihe (1) die Differentialgleichungen[3]):

$$g_{xx}(1-a^2) + g_{yy} = 0 \quad (2a),$$

$$h_{xx}(1-a^2) + h_{yy} = 2\,a^2\,g_x\,g_{xy} - \gamma_3\,g_y\,g_{xx} \quad (2b)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}(1-a^2) + f_{yy} = {} & 2\,a^2\,[g_x\,h_{xy} + g_{xy}\,h_x] - \gamma_1\,(g_x)^2\,g_{xx} \\ & - \gamma_3\,[g_y\,h_{xx} + g_{xx}\,h_y] - \gamma_2\,(g_y)^2\,g_{xx} \\ & + a^2\,(g_x)^2\,g_{yy} - 2\,a^2\,[\varkappa\,a^2+1]\,\mu^2\,g_x\,g_y\,g_{xy} \end{aligned}\right\} \quad (2c).$$

Mit a ist die Machsche Zahl der Anströmung bezeichnet $\left(a = \frac{U}{a_\infty},\ a_\infty$ Schallgeschwindigkeit im Unendlichen$\right)$, $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ bedeutet das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und Volumen. Zur Abkürzung ist weiter gesetzt:

$$\mu^2 = \frac{1}{1-a^2}, \qquad P = \frac{a^4\mu^4}{8}\,[3 + (\varkappa+1)\,\mu^2],$$

$$\gamma_1 = -\frac{\varkappa+1}{2}\,a^4\mu^2,$$

$$\gamma_2 = -a^2\left[\mu^4 + 3\,a^2\mu^2 + 8\,P + (\varkappa-1)\left(\frac{3}{2}\,a^4\mu^2 + \frac{5}{2}\,a^2\mu^4 + 4\,a^2\,P\right) + (\varkappa-1)^2\,a^4\mu^4\right],$$

$$\gamma_3 = 2\,a^2\mu^2 + (\varkappa-1)\,a^4\mu^2.$$

Führt man an Stelle von $g(x,y)$, $h(x,y)$ und $f(x,y)$ die Abschnitte der Stromfunktion ψ ein:

$$\frac{1}{U}\,\overline{\psi}^{(1)}(x,y,\lambda) = -y + g(x,y)\,\lambda,$$

$$\frac{1}{U}\,\overline{\psi}^{(2)}(x,y,\lambda) = -y + g(x,y)\,\lambda + h(x,y)\,\lambda^2,$$

$$\frac{1}{U}\,\overline{\psi}^{(3)}(x,y,\lambda) = -y + g(x,y)\,\lambda + h(x,y)\,\lambda^2 + f(x,y)\,\lambda^3,$$

[2]) Für welche Strömungen sich ψ wirklich nach einem Parameter λ entwickeln läßt, kann allgemein nicht entschieden werden. Auf eine Verallgemeinerung von (1) werden wir in Beispiel B von § 3 geführt.

[3]) Vgl. S. 74 von [1]).

so überzeugt man sich leicht, daß das System der Differentialgleichungen (2)ᵣ mit dem folgenden äquivalent wird:

$$\overline{\psi}^{(1)}_{xx}(1-a^2)+\overline{\psi}^{(1)}_{yy}=0 \quad \ldots \quad (3a),$$

$$\overline{\psi}^{(2)}_{xx}(1-a^2)+\overline{\psi}^{(2)}_{yy}=2a^2\frac{\overline{\psi}^{(1)}_x\,\overline{\psi}^{(1)}_{xy}}{U}-\gamma_3\left(1+\frac{\overline{\psi}^{(1)}_y}{U}\right)\overline{\psi}^{(1)}_{xx} \quad \ldots \quad (3b),$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\psi}^{(3)}_{xx}(1-a^2)+\overline{\psi}^{(3)}_{yy}=&\,2a^2\left[\frac{\overline{\psi}^{(1)}_x\,\overline{\psi}^{(2)}_{xy}}{U}+\frac{\overline{\psi}^{(1)}_{xy}\,\overline{\psi}^{(2)}_x}{U}-\frac{\overline{\psi}^{(1)}_x\,\overline{\psi}^{(1)}_{xy}}{U}\right]+a^2\left(\frac{\overline{\psi}^{(1)}_x}{U}\right)^2\overline{\psi}^{(1)}_{yy}\\&-\left[\gamma_1\left(\frac{\overline{\psi}^{(1)}_x}{U}\right)^2+\gamma_2\left(1+\frac{\overline{\psi}^{(1)}_y}{U}\right)^2\right]\overline{\psi}^{(1)}_{xx}\\&-\gamma_3\left[\left(1+\frac{\overline{\psi}^{(1)}_y}{U}\right)\overline{\psi}^{(2)}_{xx}+\left(1+\frac{\overline{\psi}^{(2)}_y}{U}\right)\overline{\psi}^{(1)}_{xx}-\left(1+\frac{\overline{\psi}^{(1)}_y}{U}\right)\overline{\psi}^{(1)}_{xx}\right]\\&-2a^2(\varkappa a^2+1)\mu^2\left(1+\frac{\overline{\psi}^{(1)}_y}{U}\right)\frac{\overline{\psi}^{(1)}_x}{U}\,\overline{\psi}^{(1)}_{xy}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3c).$$

Das Näherungsverfahren wird nun in der Weise durchgeführt, daß wir drei im allgemeinen von $\overline{\psi}^{(1)}$, $\overline{\psi}^{(2)}$, $\overline{\psi}^{(3)}$ verschiedene „Stromfunktionen“ $\psi^{(1)}(x, y, \lambda)$, $\psi^{(2)}(x, y, \lambda)$, $\psi^{(3)}(x, y, \lambda)$ bestimmen, die den Randbedingungen von ψ genügen:

a) $\psi^{(j)}(x, y, \lambda) = \text{const}$ auf dem Profil,

b) $\dfrac{\partial \psi^{(j)}}{\partial x}=0, \quad \dfrac{\partial \psi^{(j)}}{\partial y}=-U$ im Unendlichen $\quad (j=1,2,3)$,

c) glatter Abfluß an der Hinterkante des Profils bzw. Staupunkt

und die Differentialgleichungen (3) erfüllen:

$$\psi^{(1)}_{xx}(1-a^2)+\psi^{(1)}_{yy}=0 \quad \ldots \quad (4a),$$

$$\psi^{(2)}_{xx}(1-a^2)+\psi^{(2)}_{yy}=2a^2\frac{\psi^{(1)}_x}{U}\,\psi^{(1)}_{xy}-\gamma_3\left(1+\frac{\psi^{(1)}_y}{U}\right)\psi^{(1)}_{xx} \quad \ldots \quad (4b),$$

$$\left.\begin{aligned}\psi^{(3)}_{xx}(1-a^2)+\psi^{(3)}_{yy}=&\,2a^2\left[\frac{\psi^{(1)}_x\,\psi^{(2)}_{xy}}{U}+\frac{\psi^{(1)}_{xy}\,\psi^{(2)}_x}{U}-\frac{\psi^{(1)}_x\,\psi^{(1)}_{xy}}{U}\right]+a^2\left(\frac{\psi^{(1)}_x}{U}\right)^2\psi^{(1)}_{yy}\\&-\gamma_3\left[\left(1+\frac{\psi^{(1)}_y}{U}\right)\psi^{(2)}_{xx}+\left(1+\frac{\psi^{(2)}_y}{U}\right)\psi^{(1)}_{xx}-\left(1+\frac{\psi^{(1)}_y}{U}\right)\psi^{(1)}_{xx}\right]\\&-2a^2(\varkappa a^2+1)\mu^2\left(1+\frac{\psi^{(1)}_y}{U}\right)\frac{\psi^{(1)}_x\,\psi^{(1)}_{xy}}{U}-\left[\gamma_1\left(\frac{\psi^{(1)}_x}{U}\right)^2+\gamma_2\left(1+\frac{\psi^{(1)}_y}{U}\right)^2\right]\psi^{(1)}_{xx}\end{aligned}\right\} \quad (4c).$$

Es ist zu erwarten, daß die Näherungen $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ bzw. $\psi^{(3)}$ in ihrer Entwicklung nach λ mit der Reihe (1) für ψ bis zum linearen, quadratischen bzw. kubischen Glied übereinstimmen, da wir in den Differentialgleichungen (4b) bzw. (4c) gegenüber (3b) bzw. (3c) auf der rechten Seite nur Fehler in jeweils höheren Gliedern von λ machen[4]).

Die Näherungsfunktion $\psi^{(1)}(x, y, \lambda)$ ist offenbar die Prandtl-Busemannsche Näherung für die Stromfunktion. Die Differentialgleichung (4b) wurde früher behandelt, wir wollen jetzt auch noch (4c) integrieren.

Dazu transformieren wir die Differentialgleichungen (4a, b, c) auf geeignete unabhängige Variable. Durch die affine Verzerrung

$$\xi=x, \qquad \eta=\frac{y}{\mu}=y\sqrt{1-a^2}$$

erreicht man, daß auf der linken Seite der Differentialgleichungen der Laplacesche Operator auftritt. Das Profil der $\xi\eta$-Ebene geht aus dem der xy-Ebene durch diese Verzerrung hervor. Das Außengebiet des verzerrten Profils werde nun konform auf das des Kreises

[4]) Für den Fall überall gleicher Zusatzgeschwindigkeiten, also staupunktsloser Strömung, kann dies bei einigen in praktischen Beispielen im allgemeinen erfüllten Voraussetzungen über die Profilformen bis zur dritten Näherung streng bewiesen werden.

$r=\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}=a$ einer $\mathfrak{x},\mathfrak{y}$-Ebene abgebildet. Bezeichnen wir mit ζ bzw. $\mathfrak{z}$ die komplexe Variable $\xi+i\eta$ bzw. $\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}$, so sei die Abbildungsfunktion durch die Beziehung

$$\zeta=\zeta(\mathfrak{z})$$

gegeben. In der Umgebung von $\mathfrak{z}=\infty$ sei diese Abbildung die identische. Mit

$$\psi^{(j)}(x,y,\lambda)=\mu X^{(j)}(\xi,\eta,\lambda)=\mu K^{(j)}(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\lambda)\quad (j=1,2,3) \qquad (5)$$

nehmen dann die Differentialgleichungen (4a), (4b), (4c) die Gestalt an:

$$\Delta K^{(1)}=0, \qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial\mathfrak{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\mathfrak{y}^2} \qquad (6a),$$

$$\Delta K^{(2)}=\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\mathfrak{z}}\right|^2\left\{2a^2\mu^2\frac{X^{(1)}_\xi X^{(1)}_\eta}{U}-\gamma_3\mu^2\left(1+\frac{X^{(1)}_\eta}{U}\right)X^{(1)}_{\xi\xi}\right\} \qquad (6b),$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta K^{(3)}=\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\right|^2\Bigg\{&2a^2\mu^2\left[\frac{X^{(1)}_\xi X^{(2)}_{\xi\eta}}{U}+\frac{X^{(1)}_{\xi\eta}X^{(2)}_\xi}{U}-\frac{X^{(1)}_\xi X^{(1)}_{\xi\eta}}{U}\right]\\&-\gamma_3\mu^2\left\{\left(1+\frac{X^{(1)}_\eta}{U}\right)X^{(2)}_{\xi\xi}+\left(1+\frac{X^{(2)}_\eta}{U}\right)X^{(1)}_{\xi\xi}-\left(1+\frac{X^{(1)}_\eta}{U}\right)X^{(1)}_{\xi\xi}\right\}\\&-2a^2\mu^4(\varkappa a^2+1)\left(1+\frac{X^{(1)}_\eta}{U}\right)\frac{X^{(1)}_\xi}{U}X^{(1)}_{\xi\eta}+a^2\left(\frac{X^{(1)}_\xi}{U}\right)^2X^{(1)}_{\eta\eta}\mu^2\\&-\left[\gamma_1\mu^2\left(\frac{X^{(1)}_\xi}{U}\right)^2+\gamma_2\left(1+\frac{X^{(1)}_\eta}{U}\right)^2\right]X^{(1)}_{\xi\xi}\mu^2\Bigg\}\end{aligned}\right\} \qquad (6c).$$

Für die Funktionen $K^{(1)}(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\lambda)$, $K^{(2)}(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\lambda)$, $K^{(3)}(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\lambda)$ haben wir offenbar die Randbedingungen:

a) $K^{(j)}=\text{const}$ auf dem Kreise $r=a$,

b) $\dfrac{\partial K^{(j)}}{\partial\mathfrak{x}}=0, \quad \dfrac{\partial K^{(j)}}{\partial\mathfrak{y}}=-U$ im Unendlichen $\quad (j=1,2,3)$,

c) $\dfrac{\partial K^{(j)}}{\partial\mathfrak{x}}=0, \quad \dfrac{\partial K^{(j)}}{\partial\mathfrak{y}}=0$ im Bildpunkte der Hinterkante des Profils.

§ 2. Allgemeine Integration der Differentialgleichung des dritten Schrittes.

Für die Integration der Gl. (6c) brauchen wir zur Berechnung der rechten Seite die Struktur der Funktionen $X^{(1)}(\xi,\eta)$ und $X^{(2)}(\xi,\eta)$ (die Abhängigkeit dieser Funktionen vom Parameter λ werde hier und im folgenden nicht mehr ausdrücklich angegeben) und ihrer ersten partiellen Ableitungen nach ξ und η. Wir geben diese daher in den Abschnitten A und B an. Unter C wird die rechte Seite von (6c) aufgestellt. Der Absatz D bringt die Integration.

A. Die Gestalt der Funktionen $X^{(1)}(\xi,\eta)$ und $X^{(2)}(\xi,\eta)$. Bezeichnen wir mit $U\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ das komplexe Potential der inkompressiblen Strömung in der $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$-Ebene um den Kreis $r=a$ bei der Anströmgeschwindigkeit $-U$ und den Bildpunkt der Hinterkante als Staupunkt, so ist $K^{(1)}$ offenbar:

$$\frac{K^{(1)}}{U}=\mathfrak{Im}\,\mathfrak{W}(\mathfrak{z}) \qquad (7).$$

Mit $\mathfrak{Im}$ (bzw. $\mathfrak{Re}$) wird der Imaginärteil (bzw. Realteil) einer komplexen Größe bezeichnet. Wie in der in Fußnote [1]) zitierten Arbeit gezeigt wurde, und aus der Berechnung von $K^{(3)}$ nochmals mit hervorgehen wird, hat $K^{(2)}$ dann die Gestalt:

$$\frac{K^{(2)}}{U}=\frac{K^{(1)}}{U}+\mathfrak{Im}\{\pi_1\mathfrak{G}(\mathfrak{z})\overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{z})}+\pi_2\zeta(\mathfrak{z})\overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{z})}^2+\mathfrak{Q}(\mathfrak{z})\} \qquad (8).$$

Dabei bedeuten

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{G}(\mathfrak{z})&=\zeta(\mathfrak{z})+\mathfrak{W}(\mathfrak{z})\\\mathfrak{M}(\mathfrak{z})&=1+\frac{\mathrm{d}\mathfrak{W}}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}\end{aligned}\right\} \qquad (8a)$$

und weiter ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}\pi_1&=\frac{a^2\mu^2}{2}+\frac{a^4\mu^4}{8}(\varkappa+1)\\\pi_2&=\frac{a^4\mu^4}{16}(\varkappa+1)\end{aligned}\right\} \qquad (8b).$$

Der Strich gibt den Übergang zur konjugiert komplexen Größe an und die Funktion $\mathfrak{Q}(\mathfrak{z})$ bestimmt sich durch die Randbedingungen von $K^{(2)}$.

Die Ausdrücke für $X^{(1)}(\xi,\eta)$ und $X^{(2)}(\xi,\eta)$ ergeben sich dann wegen (5) aus (7) und (8):

$$\left.\begin{aligned}\frac{X^{(1)}}{U}&=\Im\mathfrak{m}\,\mathfrak{W}(\mathfrak{z})\\ \frac{X^{(2)}}{U}&=\Im\mathfrak{m}\,(\mathfrak{W}(\mathfrak{z})+\pi_1\,\mathfrak{G}(\mathfrak{z})\,\overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{z})}+\pi_2\,\zeta(\mathfrak{z})\,\overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{z})}'+\mathfrak{Q}(\mathfrak{z}))\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(9).$$

B. Die Berechnung der ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $X^{(1)}(\xi,\eta)$ und $X^{(2)}(\xi,\eta)$. Zur Berechnung der Differentialquotienten von $X^{(1)}(\xi,\eta)$ und $X^{(2)}(\xi,\eta)$ nach ξ und η wollen wir zunächst einige Hilfsbetrachtungen über das Rechnen mit komplexen Ausdrücken hinter dem Zeichen $\mathfrak{Re}$ und $\mathfrak{Im}$ anstellen.

Für eine analytische Funktion hat man die Beziehungen:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}f(\mathfrak{z})=\frac{\mathrm{d}f(\mathfrak{z})}{\mathrm{d}\mathfrak{z}},\qquad\frac{\partial}{\partial\eta}f(\mathfrak{z})=i\,\frac{\mathrm{d}f(\mathfrak{z})}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}.$$

Durch Übergang zu konjugiert imaginären Größen bekommt man daraus:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{f(\mathfrak{z})}=\overline{\frac{\mathrm{d}f(\mathfrak{z})}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}},\qquad\frac{\partial}{\partial\eta}\overline{f(\mathfrak{z})}=-i\,\overline{\frac{\mathrm{d}f(\mathfrak{z})}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}}.$$

Geht man in den analytischen Funktionen $f(\mathfrak{z})$ und $h(\mathfrak{z})$ mit $\zeta=\zeta(\mathfrak{z})$ zu der Variablen ζ über: $f(\mathfrak{z})=F(\zeta)$, $h(\mathfrak{z})=H(\zeta)$, so ergibt sich leicht:

$$\frac{\partial F(\zeta)}{\partial\xi}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta},\qquad\frac{\partial F(\zeta)}{\partial\eta}=i\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta},$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[F(\zeta)\,\overline{H(\zeta)}]=\frac{\partial F}{\partial\xi}\,\overline{H(\zeta)}+F(\zeta)\,\frac{\partial\overline{H(\zeta)}}{\partial\xi}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}\,\overline{H(\zeta)}+F(\zeta)\,\overline{\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\zeta}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}[F(\zeta)\,\overline{H(\zeta)}]=i\left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}\,\overline{H(\zeta)}-F(\zeta)\,\overline{\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\zeta}}\right].$$

Damit erhält man die Relationen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{Re}\,f(\mathfrak{z})&=\mathfrak{Re}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta},&\qquad\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{Im}\,f(\mathfrak{z})&=\mathfrak{Im}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta},\\ \frac{\partial}{\partial\eta}\mathfrak{Re}\,f(\mathfrak{z})&=-\mathfrak{Im}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta},&\qquad\frac{\partial}{\partial\eta}\mathfrak{Im}\,f(\mathfrak{z})&=\mathfrak{Re}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(10)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{Re}\,f(\mathfrak{z})\,\overline{h(\mathfrak{z})}&=\mathfrak{Re}\left[\bar h\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}+f\,\overline{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}}\right],&\qquad\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{Im}\,f\bar h&=\mathfrak{Im}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}\bar h+f\,\overline{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}}\right),\\ \frac{\partial}{\partial\eta}\mathfrak{Re}\,f\bar h&=-\mathfrak{Im}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}\bar h-f\,\overline{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}}\right],&\qquad\frac{\partial}{\partial\eta}\mathfrak{Im}\,f\bar h&=\mathfrak{Re}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}\bar h-f\,\overline{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}}\right)\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Rechenformeln, deren allgemeinen Aufbau man leicht übersieht.

Die Ableitungen von $X^{(1)}(\xi,\eta)$ ergeben sich aus (9) nun sofort mit (10) zu:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{U}\,X^{(1)}_{\xi}&=\Im\mathfrak{m}\,\mathfrak{M},\\ 1+\frac{1}{U}\,X^{(1)}_{\eta}&=\mathfrak{Re}\,\mathfrak{M},\\ \frac{1}{U}\,X^{(1)}_{\xi\xi}&=-\frac{1}{U}\,X^{(1)}_{\eta\eta}=\Im\mathfrak{m}\,\mathfrak{N},\\ \frac{1}{U}\,X^{(1)}_{\xi\eta}&=\mathfrak{Re}\,\mathfrak{N}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(12),$$

wenn wir noch zur Abkürzung

$$\mathfrak{N}=\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\zeta}\quad\ldots\ldots\quad(13a)$$

setzen. Die Ableitungen von $X^{(2)}(\xi,\eta)$ erhalten wir aus (9) und (11):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{U}X^{(2)}_{\xi} &= \mathfrak{Im}\,[\mathfrak{M}+\pi_1\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{N}+\pi_2\,\overline{\mathfrak{M}^2}+\pi_2\,\zeta\,\overline{\mathfrak{S}}+\mathfrak{P}],\\
1+\frac{1}{U}X^{(2)}_{\eta} &= \mathfrak{Re}\,[\mathfrak{M}+\pi_1\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{M}}-\pi_1\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{N}+\pi_2\,\overline{\mathfrak{M}^2}-\pi_2\,\zeta\,\overline{\mathfrak{S}}+\mathfrak{P}],\\
\frac{1}{U}X^{(2)}_{\xi\xi} &= \mathfrak{Im}\,[\mathfrak{N}+\pi_1\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{N}}+\pi_1\,\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{L}}+2\,\pi_2\,\overline{\mathfrak{S}}+\pi_2\,\zeta\,\overline{\mathfrak{T}}+\mathfrak{K}],\\
\frac{1}{U}X^{(2)}_{\xi\eta} &= \mathfrak{Re}\,[\mathfrak{N}+\pi_1\,\mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{M}}-\pi_1\,\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{L}}-\pi_2\,\zeta\,\overline{\mathfrak{T}}+\mathfrak{K}]
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(14),$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{S}&=\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{M}^2}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\,\zeta}, \qquad \mathfrak{P}=\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{Q}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\,\zeta},\\
\mathfrak{L}&=\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{N}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\,\zeta}, \qquad \mathfrak{T}=\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{S}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\,\zeta}, \qquad \mathfrak{K}=\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{P}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\,\zeta}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(13\,\mathrm{b}).$$

C. Die Aufstellung der rechten Seite von (6c). Da für die komplexen Größen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$

$$2\,\mathfrak{Im}\,\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{Re}\,\mathfrak{Q}=\mathfrak{Im}\,(\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{Q}})$$

ist, können die einzelnen Glieder der rechten Seite von (6c) in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\frac{2\,X^{(1)}_{\xi}X^{(2)}_{\xi\eta}}{U^2} &= \mathfrak{Im}\,[\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}+\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{N}}+\pi_1\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{M}}+\pi_1\,\mathfrak{M}^2\,\overline{\mathfrak{N}}-\pi_1\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{L}}\\
&\quad-\pi_1\,\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{L}-\pi_2\,\zeta\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{T}}-\pi_2\,\bar{\zeta}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{T}+\mathfrak{M}\,\mathfrak{K}+\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{K}}],\\
\frac{2\,X^{(1)}_{\xi\eta}X^{(2)}_{\xi}}{U^2} &= \mathfrak{Im}\,[\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}+\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{N}}+\pi_1\,\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{N}}\,\mathfrak{N}+\pi_1\,\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{N}^2}+\pi_2\,\overline{\mathfrak{M}^2}\,\mathfrak{N}+\pi_2\,\overline{\mathfrak{M}^2}\,\overline{\mathfrak{N}}\\
&\quad+\pi_2\,\zeta\,\overline{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{N}+\pi_2\,\zeta\,\overline{\mathfrak{S}}\,\overline{\mathfrak{N}}+\mathfrak{P}\,\mathfrak{N}+\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{N}}],\\
\frac{2\,X^{(1)}_{\xi}X^{(1)}_{\xi\eta}}{U^2} &= \mathfrak{Im}\,[\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}+\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{N}}],\\
2\left(1+\frac{X^{(1)}_{\eta}}{U}\right)\frac{X^{(2)}_{\xi\xi}}{U} &= \mathfrak{Im}\,[\mathfrak{N}\,\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{M}}+\pi_1\,\mathfrak{M}^2\,\overline{\mathfrak{N}}+\pi_1\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{M}}\,\overline{\mathfrak{N}}+\pi_1\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{L}}+\pi_1\,\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{M}}\,\overline{\mathfrak{L}}\\
&\quad+2\,\pi_2\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{S}}+2\,\pi_2\,\overline{\mathfrak{M}}\,\overline{\mathfrak{S}}+\pi_2\,\zeta\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{T}}+\pi_2\,\zeta\,\overline{\mathfrak{M}}\,\overline{\mathfrak{T}}+\mathfrak{M}\,\mathfrak{K}+\overline{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{K}],\\
2\left(1+\frac{X^{(2)}_{\eta}}{U}\right)\frac{X^{(1)}_{\xi\xi}}{U} &= \mathfrak{Im}\,[\mathfrak{N}\,\mathfrak{M}+\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}+2\,\pi_1\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{N}-\pi_1\,\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{N}}\,\mathfrak{N}-\pi_1\,\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{N}^2+\pi_2\,\overline{\mathfrak{M}^2}\,\mathfrak{N}\\
&\quad+\pi_2\,\mathfrak{M}^2\,\mathfrak{N}-\pi_2\,\zeta\,\overline{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{N}-\pi_2\,\bar{\zeta}\,\overline{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{N}+\mathfrak{P}\,\mathfrak{N}+\overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{N}],\\
2\left(1+\frac{X^{(1)}_{\eta}}{U}\right)\frac{X^{(1)}_{\xi\xi}}{U} &= \mathfrak{Im}\,[\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}+\overline{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{N}],\\
4\left(1+\frac{X^{(1)}_{\eta}}{U}\right)\frac{X^{(1)}_{\xi}}{U}\,\frac{X^{(1)}_{\xi\eta}}{U} &= \mathfrak{Im}\,[\mathfrak{M}^2\,\mathfrak{N}+\mathfrak{M}^2\,\overline{\mathfrak{N}}],\\
4\left(\frac{X^{(1)}_{\xi}}{U}\right)^2\frac{X^{(1)}_{\eta\eta}}{U} &= \mathfrak{Im}\,[\mathfrak{N}\,\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{M}^2}-2\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{M}}],\\
4\left(\frac{X^{(1)}_{\xi}}{U}\right)^2\frac{X^{(1)}_{\xi\xi}}{U} &= \mathfrak{Im}\,[-\mathfrak{N}\,\mathfrak{M}^2-\mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{M}^2}+2\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{M}}],\\
4\left(1+\frac{X^{(1)}_{\eta}}{U}\right)^2\frac{X^{(1)}_{\xi\xi}}{U} &= \mathfrak{Im}\,(\mathfrak{N}\,\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{M}^2}+2\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{N}).
\end{aligned}$$

Damit bekommt man aber für $\frac{\Delta K^{(3)}}{U}$ die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta K^{(3)}}{U} = \left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\right|^2 \Im\mathrm{m}\,\{&4\pi_1\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{N}} + 8\pi_2\,\overline{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{N} + 2\nu_1\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{L}} + \nu_2\,\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{L}\\ &+ \nu_3\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{N}} + 3\nu_4\,\mathfrak{M}^2\,\mathfrak{N} + (2\nu_5 + 2\nu_9)\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{M}}\\ &+ 2\nu_6\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{T}\,\bar{\zeta} + \nu_7\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{M} + \nu_8\,\mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{M}} + \nu_9\,\mathfrak{S}\,\bar{\zeta}\,\overline{\mathfrak{N}} + \nu_{10}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{N}\\ &+ (\nu_{11} + \nu_3)\,\mathfrak{M}^2\,\overline{\mathfrak{N}} + \frac{\nu_2}{2}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{T}\,\zeta + \nu_2\,\mathfrak{G}\,\mathfrak{N}^2 + 2\nu_6\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{N}\,\bar{\zeta} + \nu_7\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{P}\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15),$$

wo die ν_j $(j = 1, \ldots, 11)$ folgende Abkürzungen sind:

$$\left.\begin{aligned}&\nu_1 = -\pi_1\frac{\alpha^2\mu^2}{2} - \frac{1}{4}\pi_1\gamma_3\mu^2 = -2\pi_1^2, \qquad \nu_2 = \pi_1\alpha^2\mu^2 - \frac{1}{2}\pi_1\gamma_3\mu^2 = -8\pi_1\pi_2,\\ &\nu_3 = \alpha^2\mu^2\pi_1 + \frac{\pi_1}{2}\gamma_3\mu^2 = 4\pi_1^2,\\ &\nu_4 = \frac{1}{3}\left[-\alpha^2\mu^2\pi_2 + \frac{3}{2}\pi_2\gamma_3\mu^2 + \frac{\alpha^2\mu^2}{4} + \frac{\gamma_1\mu^4}{4} - \frac{\gamma_2\mu^2}{4} - \frac{\alpha^2\mu^4}{2}(\varkappa\alpha^2 + 1)\right]\\ &\nu_5 = \frac{\alpha^2\mu^2}{2}\pi_1 - \frac{1}{4}\gamma_3\mu^2\pi_1 - \frac{\alpha^2\mu^2}{4} - \frac{\gamma_1\mu^4}{4} - \frac{\gamma_2\mu^2}{4} + \alpha^2\mu^2\pi_2 + \frac{3}{2}\gamma_3\mu^2\pi_2,\\ &\nu_6 = -\frac{1}{2}\pi_2\alpha^2\mu^2 + \frac{1}{4}\pi_2\gamma_3\mu^2 = 4\pi_2^2, \qquad \nu_7 = \alpha^2\mu^2 - \frac{1}{2}\gamma_3\mu^2 = -8\pi_2,\\ &\nu_8 = -\alpha^2\mu^2 - \frac{1}{2}\gamma_3\mu^2 = -4\pi_1, \qquad \nu_9 = -\alpha^2\mu^2\pi_2 - \frac{\pi_2}{2}\gamma_3\mu^2 = -4\pi_1\pi_2,\\ &\nu_{10} = \alpha^2\mu^2 + \frac{1}{2}\gamma_3\mu^2 = 4\pi_1,\\ &\nu_{11} = -\alpha^2\mu^2\pi_2 - \pi_1\gamma_3\mu^2 + \frac{\pi_2}{2}\gamma_3\mu^2 - \frac{\alpha^2\mu^2}{4} - \frac{\gamma_1\mu^4}{4} + \frac{\gamma_2\mu^2}{4} - \frac{\alpha^2\mu^4}{2}(\varkappa\alpha^2 + 1)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16).$$

D. Die Integration von Gl. (6c). Zur Integration von (15) führen wir als unabhängige Variable $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ ein[5]). Wegen

$$\frac{\partial^2 K^{(3)}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 K^{(3)}}{\partial\eta^2} = 4\frac{\partial^2 K^{(3)}}{\partial\mathfrak{z}\,\partial\bar{\mathfrak{z}}}$$

kann das allgemeine Integral von (15) angegeben werden, wenn die Doppelintegrale in $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ über die einzelnen Terme der rechten Seite bekannt sind. Diese lassen sich aber weitgehend ausführen oder sind zumindestens auf einfache Quadraturen zurückführbar, weil $\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\right|^2 = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}$ ist und die einzelnen Glieder der rechten Seite von (15) ebenfalls in ein Produkt einer Funktion von $\mathfrak{z}$ und einer in $\bar{\mathfrak{z}}$ zerfallen. So hat man z. B.

$$\int \mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{L}}\,\mathfrak{M}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \int \mathfrak{G}\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{G}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}{\mathrm{d}\,\zeta}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathfrak{N}}}{\mathrm{d}\,\bar{\mathfrak{z}}}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\bar{\mathfrak{z}}}{\mathrm{d}\,\zeta}\right)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}$$

oder

$$\int \mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{L}}\,\mathfrak{M}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\cdot\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \int \mathfrak{G}\,\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{G}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}\,\mathfrak{z}\cdot\int\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathfrak{N}}}{\mathrm{d}\,\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\,\bar{\mathfrak{z}} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{G}^2\,\overline{\mathfrak{N}}.$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\int \mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{N}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{M}}, \qquad \int \overline{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{N}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \frac{1}{2}\,\overline{\mathfrak{M}}^2\,\zeta,$$

$$\int \mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{M}}\,\overline{\mathfrak{L}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \int \mathfrak{G}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\cdot\int \overline{\mathfrak{M}}\,\overline{\mathfrak{L}}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \left(\mathfrak{N}\,\mathfrak{M} - \int \mathfrak{N}\frac{\mathrm{d}\,\overline{\mathfrak{M}}}{\mathrm{d}\,\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\,\bar{\mathfrak{z}}\right)\int \mathfrak{G}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z},$$

$$\int \mathfrak{G}\,\mathfrak{N}\,\overline{\mathfrak{N}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \overline{\mathfrak{M}}\int\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{M}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}\,\mathfrak{G}\,\mathrm{d}\,\mathfrak{z} = \left(\mathfrak{M}\,\mathfrak{G} - \int \mathfrak{M}^2\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\right)\overline{\mathfrak{M}},$$

$$\int \mathfrak{M}^2\,\mathfrak{N}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \frac{1}{3}\,\mathfrak{M}^3\bar{\zeta}, \qquad \int \mathfrak{N}\,\mathfrak{M}\,\overline{\mathfrak{M}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}^2\,\overline{\mathfrak{G}},$$

$$\int \mathfrak{M}\,\mathfrak{T}\,\bar{\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mathfrak{z}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}}}\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} = \frac{1}{2}\,\bar{\zeta}^2\int\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{S}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}\,\mathfrak{M}\,\mathrm{d}\,\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\,\bar{\zeta}^2\left(\mathfrak{S}\,\mathfrak{M} - \int \mathfrak{S}\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{M}}{\mathrm{d}\,\mathfrak{z}}\,\mathrm{d}\,\mathfrak{z}\right),$$

[5]) Die Rechtfertigung des formalen Rechnens mit $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ als unabhängige Variable findet sich auf S. 77 von [1])

$$\int \mathfrak{K}\,\mathfrak{M}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}\cdot\overline{\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}}\,d\mathfrak{z}\,d\bar{\mathfrak{z}}=\bar{\xi}\int\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{z}}\mathfrak{M}\,d\mathfrak{z}=\xi\left(\mathfrak{P}\mathfrak{M}-\int\mathfrak{N}\frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{z}}d\mathfrak{z}\right),$$

$$\int \mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{M}}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}\cdot\overline{\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}}\,d\mathfrak{z}\,d\bar{\mathfrak{z}}=\mathfrak{P}\mathfrak{G},$$

$$\int \mathfrak{S}\,\xi\,\mathfrak{N}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}\cdot\overline{\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}}\,d\mathfrak{z}\,d\bar{\mathfrak{z}}=\mathfrak{M}^2\int\overline{\frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{z}}}\bar{\zeta}\,d\bar{\mathfrak{z}}=\mathfrak{M}^2(\zeta\overline{\mathfrak{M}}-\mathfrak{G}),$$

$$\int \mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{N}}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}\overline{\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}}\,d\mathfrak{z}\,d\bar{\mathfrak{z}}=\mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{M}},\qquad\int\mathfrak{M}^2\,\overline{\mathfrak{N}}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}\overline{\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}}\,d\mathfrak{z}\,d\bar{\mathfrak{z}}=\overline{\mathfrak{M}}\int\mathfrak{M}^2\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}d\mathfrak{z},$$

$$\int \mathfrak{M}\,\zeta\,\mathfrak{T}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}\cdot\overline{\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}}\,d\mathfrak{z}\,d\bar{\mathfrak{z}}=\mathfrak{S}\int\frac{d\mathfrak{G}}{d\mathfrak{z}}\zeta\,d\mathfrak{z}=2\,\overline{\mathfrak{M}}\,\overline{\mathfrak{N}}\left(\mathfrak{G}\,\zeta-\int\mathfrak{G}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}d\mathfrak{z}\right),$$

$$\int \mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{N}^2}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}\cdot\overline{\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}}\,d\mathfrak{z}\,d\bar{\mathfrak{z}}=\int\mathfrak{G}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}d\mathfrak{z}\cdot\int\overline{\mathfrak{N}}\overline{\frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{z}}}\,d\mathfrak{z},$$

$$\int \mathfrak{S}\,\mathfrak{N}\,\xi\cdot\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}\cdot\overline{\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}}\,d\mathfrak{z}\,d\bar{\mathfrak{z}}=\frac{1}{2}\,\bar{\xi}^2\int\mathfrak{S}\frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{z}}d\mathfrak{z},$$

$$\int \mathfrak{N}\,\mathfrak{P}\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}\cdot\overline{\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}}\,d\mathfrak{z}\,d\bar{\mathfrak{z}}=\xi\cdot\int\mathfrak{N}\frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{z}}d\mathfrak{z}.$$

Schreibt man nun $K^{(3)}$ selbst an und ordnet die Terme, so bekommt man leicht:

$$\frac{K^{(3)}}{U}=\Im\mathrm{m}\left\{\mathfrak{W}+[\pi_1\,\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{M}}+\pi_2\,\overline{\mathfrak{M}^2}\,\zeta+\mathfrak{Q}]+\frac{1}{4}\left[\nu_1\,\overline{\mathfrak{N}}\,\mathfrak{G}^2+\nu_2\,\overline{\mathfrak{M}}\,\overline{\mathfrak{N}}\,\zeta\,\mathfrak{G}\right.\right.$$
$$+\nu_3\,\overline{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{G}+\nu_4\,\bar{\zeta}\,\overline{\mathfrak{M}^3}+\nu_5\,\mathfrak{M}^2\,\overline{\mathfrak{G}}+\nu_6\,\bar{\zeta}^2\,\overline{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{M}+\nu_7\,\bar{\xi}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{M}$$
$$\left.\left.+\nu_8\,\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{P}+\nu_9\,\mathfrak{M}^2\,\bar{\zeta}\,\overline{\mathfrak{M}}+\nu_{10}\,\mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{M}}+\nu_{11}\,\overline{\mathfrak{M}}\int\mathfrak{M}^2\frac{d\zeta}{d\mathfrak{z}}d\mathfrak{z}+F(\mathfrak{z})\right]\right\}\qquad(17).$$

Bis auf ein Integral haben sich also die noch nicht ausgeführten Quadraturen herausgehoben. $F(\mathfrak{z})$ bestimmt sich dann aus den Randbedingungen für $K^{(3)}$. Die untere Grenze des auftretenden Integrals kann beliebig gewählt werden. Eine Änderung der Integrationskonstanten bedeutet das Hinzutreten einer Funktion in $\mathfrak{z}$ und damit nur eine Änderung von $F(\mathfrak{z})$. Das Integral selbst wird sich praktisch oft auswerten lassen. Mit Rücksicht auf die allgemeine Gestalt von $\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$:

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{z})=-\left(\mathfrak{z}+\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)+A\,i\ln\frac{\mathfrak{z}}{a}$$

ist bei in $\mathfrak{z}$ rationalem $\zeta(\mathfrak{z})$ der Integrand nämlich stets eine rationale Funktion von $\mathfrak{z}$.

§ 3. Beispiele.

A. Die Berechnung der dritten Näherung für die Schar der affin verzerrten nichtangestellten Kreisbogen. Die Durchrechnung der einzelnen Näherungen setzt, wie der vorangehende Paragraph zeigt, die Kenntnis der inkompressiblen Strömung um das Profil der $\xi\eta$-Ebene und die Abbildung des Außengebietes dieses Profiles auf das eines Kreises der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene voraus. Gibt man ein Profil in der Strömungsebene ($x\,y$-Ebene) vor, so wird es im allgemeinen schwer sein, die inkompressible Strömung um das affin verzerrte Profil und die zugehörige Abbildungsfunktion zu finden. Dazu kommt noch, daß die affine Verzerrung von der Machschen Zahl abhängig ist, für jede Machsche Zahl die Rechenarbeit also neu durchgeführt werden muß. Es ist daher praktisch einfacher, sich das Profil der affin verzerrten $\xi\eta$-Ebene vorzugeben. Dann hat man zwar den Nachteil, daß die daraus gewonnenen Profile der $x\,y$-Ebene mit der Machschen Zahl sich ändern, kann aber in der $\xi\eta$-Ebene das Profil so wählen, daß die inkompressible Strömung und die Abbildungsfunktion gegeben sind.

Als Beispiel für die Berechnung der dritten Näherung wollen wir zunächst in der $\xi\eta$-Ebene den nichtangestellten Kreisbogen der Wölbung $\frac{\tau}{\mu}$ wählen. In der $x\,y$-Ebene bekommen wir dann eine Schar affin verzerrter Kreisbogen der Wölbung τ und zwar ist für $\mu=1$ ($a=0$) das Profil der $x\,y$-Ebene offenbar ein genauer Kreisbogen, mit wachsendem a erhält man Ellipsenbogen, die im Grenzfall $a\to 1$ in einen Parabelbogen übergehen.

Die Abbildungsfunktion

$$\zeta=\mathfrak{z}+\frac{i\,f}{2}+\frac{a^2-\frac{f^2}{4}}{\mathfrak{z}+\frac{i\,f}{2}}\qquad(18)$$

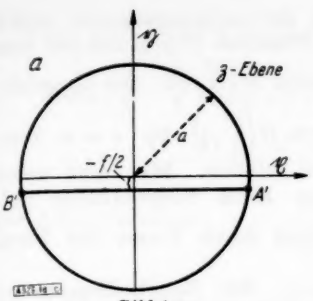


Bild 1a.

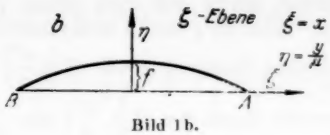


Bild 1b.

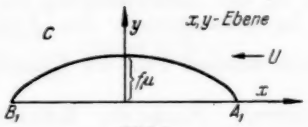


Bild 1c.

bildet den Kreis $r = a$ der $\mathfrak{z}$-Ebene auf einen Kreisbogen $\widehat{AB}$ der Pfeilhöhe f in der $\xi\eta$-Ebene ab (Bild 1). A und B sind die Bilder der durch $\mathfrak{y} = -\frac{f}{2}$ festgelegten Punkte A' und B' des Kreises in der $\mathfrak{z}$-Ebene. In der $x\,y$-Ebene erhalten wir dann einen Ellipsenbogen $\widehat{A_1 B_1}$ mit der Pfeilhöhe $f\mu$. Die Wölbung τ dieses Bogens ist, wie man sich leicht überzeugt, mit dem Parameter f durch die Beziehung

$$\tau = \frac{f\mu}{4\sqrt{a^2 - \frac{f^2}{4}}} \qquad (18a)$$

verknüpft.

Als Entwicklungsparameter verwenden wir zunächst f, das Ergebnis läßt sich ja dann leicht auf die Wölbung τ umschreiben.

Die erste Näherung $K^{(1)}$ ist nach (7) durch das komplexe Potential $U\,\mathfrak{W}(\mathfrak{z})$ der inkompressiblen Strömung um den Kreis $r = a$ der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$-Ebene gegeben. Die Anströmgeschwindigkeit ist $-U$, die Staupunkte liegen bei A' und B':

$$\frac{K^{(1)}}{U} = \Im\mathrm{m}\left\{-\left(\mathfrak{z} + \frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right) - f\,i \ln \frac{\mathfrak{z}}{a}\right\} \qquad (19)$$

Die Gestalt von $K^{(2)}$ ist nach (8) dann durch die Kenntnis von $\mathfrak{G}(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{M}(\mathfrak{z})$ und $\mathfrak{Q}(\mathfrak{z})$ festgelegt. Dabei berechnen sich $\mathfrak{G}(\mathfrak{z})$ und $\mathfrak{M}(\mathfrak{z})$ nach (8a) aus der Abbildungsfunktion (18) und dem komplexen Potential (19):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}(\mathfrak{z}) &= \frac{i\,f}{2} - \frac{a^2}{\mathfrak{z}} + \frac{a^2 - \frac{f^2}{4}}{\mathfrak{z} + \frac{i\,f}{2}} - f\,i \ln \frac{\mathfrak{z}}{a} \\ \mathfrak{M}(\mathfrak{z}) &= -\frac{i\,f}{\mathfrak{z}} + \frac{f^2}{4\,\mathfrak{z}^2} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Die analytische Funktion $\mathfrak{Q}(\mathfrak{z})$ muß so konstruiert werden, daß $K^{(2)}$ die Randbedingungen (a), (b), (c) von S. 188 erfüllt. Dies wurde in unserer ersten Arbeit unter der für die zweite Näherung zulässigen Beschränkung auf die quadratischen Glieder in f getan. Mit Rücksicht auf die Verwendung des Ausdruckes von $K^{(2)}$ in der dritten Näherung brauchen wir aber jetzt $\mathfrak{Q}$ bis zu den Gliedern in f^3 genau:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q} = &-f^2\left\{\frac{\pi_1 + \pi_2}{\mathfrak{z}} + \frac{a^2\,\pi_2}{\mathfrak{z}^3} + \pi_1 \frac{\ln \frac{\mathfrak{z}}{a}}{\mathfrak{z}}\right\} \\ &+ f^3\,i\left\{\frac{\pi_1}{8\,\mathfrak{z}^2} - \frac{a^2\pi_2}{2\,\mathfrak{z}^4} - \frac{\pi_1}{4}\frac{\ln \frac{\mathfrak{z}}{a}}{\mathfrak{z}^2}\right\} + \frac{i f^3 \pi_1}{2\,a^2} \ln \frac{\mathfrak{z}}{a} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Die zweite Näherung hat dann (bis zu den dritten Potenzen in f genau) die Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{K^{(2)}}{U} = \frac{K^{(1)}}{U} + \Im\mathrm{m}\Bigg\{ & f^2\left(\pi_1\left[-\frac{1}{2\,\bar{\mathfrak{z}}} + \frac{a^2}{2\,\bar{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}^2} + \frac{\ln \frac{\mathfrak{z}}{a}}{\bar{\mathfrak{z}}}\right] - \pi_2\left(\frac{\mathfrak{z}}{\bar{\mathfrak{z}}^2} + \frac{a^2}{\mathfrak{z}\,\bar{\mathfrak{z}}^2}\right)\right. \\ & \left. - \pi_1\left(\frac{1}{\mathfrak{z}} + \frac{\ln \frac{\mathfrak{z}}{a}}{\mathfrak{z}}\right) - \pi_2\left(\frac{1}{\mathfrak{z}} + \frac{a^2}{\mathfrak{z}^3}\right)\right) + i f^3\left\{\pi_1\left(\frac{1}{8\,\bar{\mathfrak{z}}^2} - \frac{1}{4\,\mathfrak{z}\,\bar{\mathfrak{z}}} - \frac{a^2}{8\,\mathfrak{z}^2\,\bar{\mathfrak{z}}^2} - \frac{a^2}{4\,\bar{\mathfrak{z}}\,\mathfrak{z}^3} - \frac{\ln \frac{\mathfrak{z}}{a}}{4\,\bar{\mathfrak{z}}^2}\right)\right. \\ & \left. + \pi_2\left(-\frac{1}{2\,\bar{\mathfrak{z}}^2} + \frac{\mathfrak{z}}{2\,\bar{\mathfrak{z}}^3} + \frac{a^2}{2\,\mathfrak{z}\,\bar{\mathfrak{z}}^3} + \frac{a^2}{2\,\bar{\mathfrak{z}}^2\,\mathfrak{z}^2}\right) + \pi_1\left(\frac{1}{8\,\mathfrak{z}^2} - \frac{\ln \frac{\mathfrak{z}}{a}}{4\,\mathfrak{z}^2}\right) - \pi_2\frac{a^2}{2\,\mathfrak{z}^4}\right\} + \frac{i f^3 \pi_1}{2\,a^2} \ln \frac{\mathfrak{z}}{a}\Bigg\} \end{aligned} \qquad (22)$$

Die Ermittlung von $\mathfrak{Q}$ gelingt dabei leicht mit dem schon in der vorangegangenen Arbeit verwandten Konstruktionsprinzip. Eine in $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ analytische Funktion $H(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})$ hat auf dem Kreise $r=a$ ($\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}=a^2$) offenbar dieselben Randwerte wie $H\left(\mathfrak{z},\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)$ oder $H\left(\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}},\bar{\mathfrak{z}}\right)$. Der Imaginärteil $\mathfrak{Im}\,H(\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}})$ kann deshalb entweder durch $\mathfrak{Im}\,H\left(\mathfrak{z},\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)$ oder $\mathfrak{Im}\,H\left(\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}},\bar{\mathfrak{z}}\right)$ für $r=a$ kompensiert werden. Damit gelingt es, die Randbedingung (a) zu erfüllen. Man muß dabei allerdings darauf achten, daß im Außengebiete des Kreises keine Singularitäten auftreten bzw. diese (wie in unserem Beispiel Pole im Unendlichen durch Terme der Form $\mathfrak{Im}\left[a_m\left(\mathfrak{z}^m+\frac{a^{2m}}{\mathfrak{z}^m}\right)\right]$) wieder beseitigen. Nach der Befriedigung der Randbedingung (a) bieten dann die beiden anderen Randbedingungen keine Schwierigkeiten. Der erste Bestandteil von (8) $\frac{K^{(1)}}{U}$ erfüllt die Bedingung (b); der zweite mit π_1 und π_2 behaftete hat im Unendlichen verschwindende Ableitungen. Der Staupunkt (Bedingung (c)) wird schließlich durch Addition eines Vielfachen von $\mathfrak{Im}\,i\ln\frac{\mathfrak{z}}{a}$ erfüllt.

Zur Ermittlung von $K^{(3)}$ brauchen wir [vgl. (17)] noch die Größen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$, die wir nach (13b) leicht berechnen können. Wir geben sie in ihrer Entwicklung nach f jeweils nur bis zu der Ordnung an, wie wir sie im Ausdruck von $K^{(3)}$ benötigen, um alle Terme in f, f^2 und f^3 zu erhalten:

$$\mathfrak{P}=\frac{f^2}{\mathfrak{z}^2-a^2}\left\{\pi_2+\frac{3a^2\pi_2}{\mathfrak{z}^2}+\pi_1\ln\frac{\mathfrak{z}}{a}\right\}+\cdots$$

$$\mathfrak{R}=\frac{if}{\mathfrak{z}^2-a^2}+\cdots$$

$$\mathfrak{S}=\frac{2f^2}{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2-a^2)}+\cdots$$

Das in (17) auftretende Integral läßt sich leicht ausführen. Bestimmt man weiter $F(\mathfrak{z})$ nach dem eben bei der Berechnung von $K^{(3)}$ erwähnten Konstruktionsprinzip, so erhält man schließlich für $K^{(3)}$ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\frac{K^{(3)}}{U}=\frac{K^{(2)}}{U}+f^3\,\mathfrak{Re}\Bigg[&\frac{\nu_1}{4}\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}^2-a^2}\left\{\left(\frac{1}{2}\left\{1-\frac{a^2}{\mathfrak{z}^2}\right\}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left\{1-\frac{\bar{\mathfrak{z}}^2}{a^2}\right\}\right)^2\right\}+\frac{\nu_1}{16}\left(\frac{\bar{\mathfrak{z}}^2}{a^4}-\frac{1}{\mathfrak{z}^2}\right)\\
&+\frac{\nu_1}{4(\mathfrak{z}^2-a^2)}\left(\ln\frac{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}{a^2}\right)^2-\frac{\nu_1}{4}\left(1-\frac{a^2}{\mathfrak{z}^2}\right)\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}^2-a^2}\ln\frac{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}{a^2}-\frac{\nu_2}{4}\left(\mathfrak{z}+\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)\frac{\ln\frac{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}{a^2}}{\bar{\mathfrak{z}}(\bar{\mathfrak{z}}^2-a^2)}\\
&+\frac{\nu_2}{8}\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}(\bar{\mathfrak{z}}^2-a^2)}\left\{\left(\mathfrak{z}+\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)\left(1-\frac{a^2}{\mathfrak{z}^2}\right)-\left(\bar{\mathfrak{z}}+\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}}\right)\left(1-\frac{\bar{\mathfrak{z}}^2}{a^2}\right)\right\}+\frac{\nu_2}{8\mathfrak{z}}\left(1-\frac{a^2}{\mathfrak{z}^2}\right)\left(\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}}-\frac{\mathfrak{z}}{a^2}\right)\\
&-\frac{\nu_3}{4}\frac{1}{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}\ln\frac{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}{a^2}+\frac{\nu_4}{4\mathfrak{z}^3}\left(\bar{\mathfrak{z}}+\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}}-\mathfrak{z}-\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)+\frac{\nu_5}{8\mathfrak{z}^2}\left(\frac{\bar{\mathfrak{z}}^2}{a^2}-\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}^2}\right)\\
&-\frac{\nu_5}{4}\frac{1}{\mathfrak{z}^2}\ln\frac{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}{a^2}-\frac{\nu_6}{2}\frac{1}{\mathfrak{z}^2(\mathfrak{z}^2-a^2)}\left(\left\{\bar{\mathfrak{z}}+\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}}\right\}^2-\left\{\mathfrak{z}+\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right\}^2\right)\\
&-\frac{\nu_7}{4\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2-a^2)}\left(\pi_2+\frac{3a^2\pi_2}{\mathfrak{z}^2}\right)\left(\bar{\mathfrak{z}}+\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}}-\mathfrak{z}-\frac{a^2}{\mathfrak{z}}\right)+\frac{\nu_8}{4(\mathfrak{z}^2-a^2)}\left\{\pi_2+\frac{3a^2\pi_2}{\mathfrak{z}^2}\right\}\left\{\frac{a^2}{2\bar{\mathfrak{z}}^2}-\frac{\mathfrak{z}^2}{2a^2}+\ln\frac{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}{a^2}\right\}\\
&-\frac{\nu_9}{4}\frac{a^2}{\mathfrak{z}^2\bar{\mathfrak{z}}^2}+\frac{\nu_{10}}{4}\left[-\frac{\pi_1+\pi_2}{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}-\pi_2\left(\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}^3}-\frac{1}{\mathfrak{z}^2}\right)\right]+\frac{\nu_{11}}{4}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}}+\frac{1}{3\mathfrak{z}^2}-\frac{1}{3}\frac{a^2}{\bar{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}^3}\right)\Bigg]\end{aligned}\qquad(23).$$

In dieser Darstellung für $K^{(3)}$ tritt formal für $\mathfrak{z}=\pm a$ ein Pol auf. Man überzeugt sich aber leicht, daß $K^{(3)}$ an diesen Stellen endlich bleibt und dort auch stetige erste Ableitungen hat.

Mit der Kenntnis von $K^{(3)}$ ist nach (5) und (18) das Strömungsfeld in der $x\,y$-Ebene bekannt.

Zunächst werde die Geschwindigkeit im höchsten Punkte des affin verzerrten Kreisbogens (Maximalgeschwindigkeit) der Wölbung τ angegeben. Der Zusammenhang von τ und f wird durch (18a) geliefert. Man hat für die Maximalgeschwindigkeit bis zu Gliedern in τ^3 genau

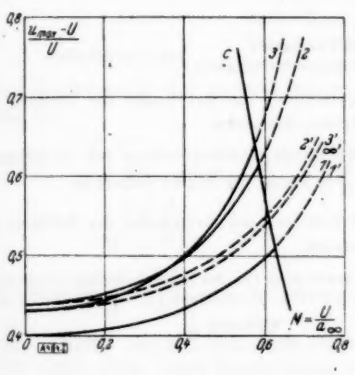
$$\frac{u_{\max}}{U} = -1 - 4\mu\tau + \tau^2\left[5 - 3\varkappa + \mu^2(-6+6\varkappa) - \mu^4(3+3\varkappa)\right] + \tau^3\left[\frac{1}{\mu}\left\{-\frac{3}{2} - \frac{\varkappa}{3} + \frac{7}{6}\varkappa^2\right\}\right.$$
$$+ \mu\left\{\frac{58}{3} - \frac{44}{3}\varkappa + \frac{10}{3}\varkappa^2\right\} + \mu^3\left\{\frac{13}{3} + \frac{50}{3}\varkappa - 17\varkappa^2\right\} + \mu^5\left\{-\frac{22}{3} + 12\varkappa + \frac{58}{3}\varkappa^2\right\}$$
$$\left. + \mu^7\left\{-\frac{41}{6} - \frac{41}{3}\varkappa - \frac{41}{6}\varkappa^2\right\}\right] \qquad (24).$$

Der Auftriebsbeiwert $c_a = \dfrac{\text{Auftrieb}}{\frac{\varrho_\infty U^2}{2} \cdot \text{Tiefe}}$ ergibt sich zu:

$$\frac{c_a}{4\pi} = \mu\tau + 2\tau^3\left\{\left(\frac{25}{12}\mu^7 + \frac{1}{12}\mu^5 - \frac{5}{12}\mu^3 - \frac{13}{12}\mu\right)\alpha^2 + (\varkappa - 1)\left(\frac{25}{12}\mu^7 + \frac{1}{3}\mu^5 - \frac{1}{4}\mu^3\right)\alpha^4\right.$$
$$\left. + (\varkappa-1)^2\left(\frac{25}{48}\mu^7 + \frac{7}{48}\mu^5\right)\alpha^6\right\} \qquad (25).$$

In Bild 2 ist die Maximalgeschwindigkeit für den Fall $\tau = \frac{1}{10}$ als Funktion der Machschen Zahl aufgetragen. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen wurde dabei 1,4 gewählt. Die im Geschwindigkeitsbild eingetragene Kurve C gibt an, wann die kritische Geschwindigkeit erreicht wird. Als erste, zweite bzw. dritte Näherung ist dabei jeweils die Entwicklung bis zum Gliede in τ, τ^2 bzw. τ^3 bezeichnet.

Wie wir schon Seite 192 angaben, deformiert sich bei konstanter Wölbung $\tau = \frac{1}{10}$ bei der Änderung der Machschen Zahl von 0 bis 1 der Kreisbogen über Ellipsenbögen zum Parabelbogen. Bis zum Erreichen der kritischen Machschen Zahl ($a = 0{,}575$) ist diese Profildeformation aber sehr gering, wie man aus Zahlentafel 1 ersieht, wo $\frac{y}{t}$ in Abhängigkeit von $\frac{x}{t}$ aufgetragen ist. (x-Achse in der Sehne, y-Achse Symmetrieachse des Kreisbogens, t Tiefe.)



Zahlentafel 1.

	$a = 0$	$a = 0{,}3$	$a = 0{,}575$
$\frac{x}{t}$	$\frac{y}{t}$	$\frac{y}{t}$	$\frac{y}{t}$
0	0,1	0,1	0,1
0,1	0,09615	0,09614	0,09610
0,2	0,08452	0,08448	0,08435
0,3	0,06491	0,06483	0,06461
0,4	0,03693	0,03685	0,03662
0,5	0	0	0

Bild 2 (links). Maximalgeschwindigkeit am affin verzerrten Kreisbogen (Wölbung $\frac{1}{10}$) in Abhängigkeit der Machschen Zahl. Kurve 1, 2, 3 erste, zweite, dritte Näherung 1', 2', 3', ..., ∞' Prandtl Glieder bis τ, τ^2, τ^3, ..., vollst. Lösung.

Berechnet man sich einmal die Geschwindigkeitsverteilung bei inkompressibler Strömung für den bei der Machschen Zahl a sich einstellenden Ellipsenbogen bis zu den Gliedern in a^3 genau, so erhält man:

$$\left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{U}\right)_{\text{ink}} = 1 + 4\tau\sqrt{1-\left(\frac{2x}{t}\right)^2} - 4\tau^2\left[8\frac{x^2}{t^2} - 1\right] + 8\tau^3\left[16\frac{x^2}{t^2}\left(\frac{1}{a^2} - 1\right) - 1\right]\sqrt{1 - \frac{4x^2}{t^2}} \qquad (26).$$

Man sieht daraus, daß im inkompressiblen Fall die Maximalgeschwindigkeit $\left(\frac{x}{t} = 0\right)$ bis zur dritten Näherung von der Profildeformation nicht beeinflußt wird. Die Kurven 1, 2 und 3 der Darstellung 2 dürften deshalb die Abhängigkeit der Maximalgeschwindigkeit von der Machschen Zahl für einen Kreisbogen der Wölbung $\frac{1}{10}$ gut wiedergeben.

Zum Vergleich mit der Prandtlschen Näherung ist in Bild 2 noch die nach der Prandtlschen Regel berechnete Maximalgeschwindigkeit am Kreisbogen nach τ entwickelt aufgetragen. Es zeigt sich dabei, daß die dritte Näherung (Glieder bis einschließlich τ^3) die vollständige Lösung schon gut annähert.

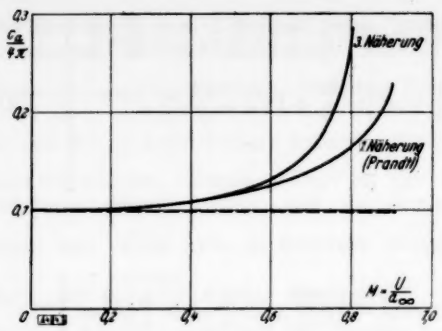


Bild 3.

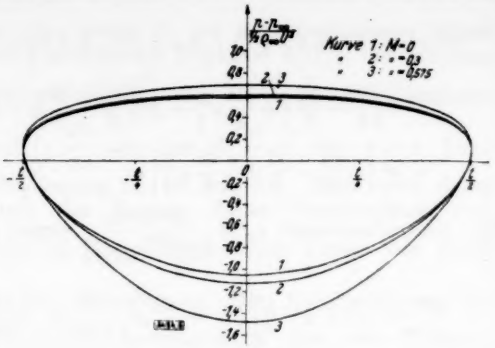


Bild 6.

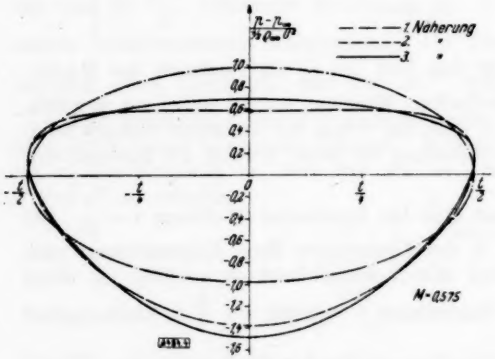


Bild 4.

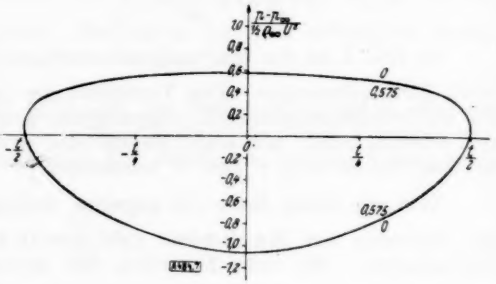


Bild 7.

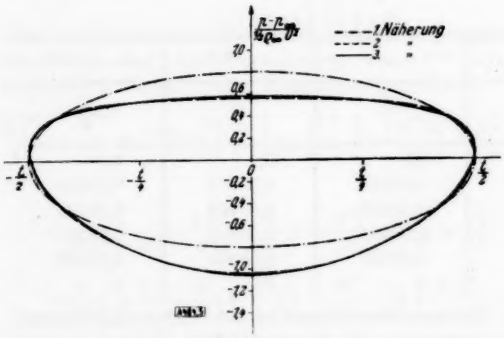


Bild 5.

Bild 3. Auftriebsbeiwert am affin verzerrten Kreisbogen (Wölbung $\frac{1}{10}$) in Abhängigkeit der Machschen Zahl.

$$c_a = \frac{\text{Auftrieb}}{\frac{1}{2}\varrho_\infty U^2 \cdot \text{Tiefe}}$$

U Geschwindigkeit, a_∞ Schallgeschwindigkeit } im Unendlichen.

Bild 4. Druckverteilung am Kreisbogen der Wölbung $\frac{1}{10}$ in erster bis dritter Näherung.

Bild 5. Inkompressible Druckverteilung am Kreisbogen der Wölbung $\frac{1}{10}$ in erster bis dritter Näherung.

Bild 6. Druckverteilung am Kreisbogen der Wölbung $\frac{1}{10}$ in dritter Näherung.

Bild 7. Druckverteilung für die inkompressible Strömung an den affin verzerrten Kreisbögen ($M=0$, $M=0{,}575$) der Wölbung $\frac{1}{10}$.

In Bild 3 ist der Auftriebsbeiwert $\frac{c_a}{4\pi}$ nach (25) auch in Abhängigkeit von der Machschen Zahl a bei konstanter Wölbung $\frac{1}{10}$ angegeben. Die in inkompressibler Strömung durch die Profildeformation eintretende Auftriebsänderung ist ebenfalls sehr gering:

$$\left(\frac{c_a}{4\pi}\right)_{\text{ink}} = \tau - 2\tau^3\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

und wird in Bild 3 durch die gestrichelte Kurve dargestellt.

In Bild 4 ist für die Machsche Zahl 0,575 (kritische Machsche Zahl der Anströmung) die Druckverteilung über der Sehne des nichtangestellten Kreisbogens der Wölbung $\frac{1}{10}$ gezeichnet. Aus dem entsprechenden Bild für die inkompressible Strömung um einen Kreisbogen (Bild 5) sieht man, daß dort mit der dritten Näherung bereits die exakte Lösung in Zeichengenauigkeit angegeben wird.

Bild 6 gibt schließlich noch in dritter Näherung die Druckverteilung für $\alpha = 0$, $\alpha = 0{,}3$ und $\alpha = 0{,}575$ in einer Darstellung. Dazu ist allerdings wieder zu bemerken, daß für die drei Machschen Zahlen die Profile nicht ganz übereinstimmen. Ihre Abweichung ist aber,

wie bereits erwähnt, gering. Bild 7 zeigt, daß die Profildeformation bei der inkompressiblen Druckverteilung (in dritter Näherung) nicht ins Gewicht fällt. Es wird dort der exakte Kreisbogen ($a=0$) der Wölbung $\frac{1}{10}$ mit dem der Machschen Zahl $a=0{,}575$ entsprechenden affin verzerrten gleicher Wölbung verglichen.

B. Die Berechnung der dritten Näherung für die nichtangestellte Ellipse. Als weiteres Beispiel wollen wir jetzt die nichtangestellte Ellipse behandeln. Die am Anfang von A. erwähnten Schwierigkeiten, daß sich das Profil im allgemeinen mit der Machschen Zahl deformiert, tritt hier nicht auf, weil eine affine Verzerrung eine Ellipse wieder in eine solche überführt. Die Funktion

$$\zeta=\mathfrak{z}+\frac{b^2}{\mathfrak{z}} \qquad b=a-d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

bildet den Kreis $r=a$ der $\mathfrak{z}$-Ebene in eine Ellipse mit dem Achsenverhältnis $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ der ζ-Ebene ab. In der xy-Ebene bekommt man dann eine Ellipse mit dem Dickenverhältnis

$$\varepsilon=\mu\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Die erste Näherung $\frac{K^{(1)}}{U}$ ist offenbar:

$$\frac{K^{(1)}}{U}=-\mathfrak{z}-\frac{a^2}{\mathfrak{z}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Die Funktionen $\mathfrak{G}(\mathfrak{z})$ und $\mathfrak{M}(\mathfrak{z})$ sind dann mit $A=a^2-b^2$:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{G}(\mathfrak{z})&=-\frac{A}{\mathfrak{z}}\\ \mathfrak{M}(\mathfrak{z})&=\frac{A}{\mathfrak{z}^2-b^2}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

und $\mathfrak{Q}(\mathfrak{z})$ bekommt, wie wir schon in unserer früheren Arbeit zeigten, die Gestalt:

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{z})=-\frac{\pi_1 A^2\mathfrak{z}}{a^2(\mathfrak{z}^2-b^2)}+\frac{\pi_2 A^2}{(\mathfrak{z}^2-b^2)^2}\left(\frac{a^2}{\mathfrak{z}}+\frac{b^2\mathfrak{z}}{a^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Zur Berechnung der dritten Näherung benötigen wir nun die leicht angebbaren Größen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}$:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P}(\mathfrak{z})&=\frac{\mathfrak{z}^2A^2}{\mathfrak{z}^2-b^2}\left[-\frac{\pi_1}{a^2(\mathfrak{z}^2-b^2)}+\frac{2\pi_1\mathfrak{z}^2}{a^2(\mathfrak{z}^2-b^2)^2}-\frac{4\pi_2\mathfrak{z}}{(\mathfrak{z}^2-b^2)^3}\left(\frac{a^2}{\mathfrak{z}}+\frac{b^2\mathfrak{z}}{a^2}\right)+\frac{\pi_2}{(\mathfrak{z}^2-b^2)^2}\left(-\frac{a^2}{\mathfrak{z}^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)\right]\\ \mathfrak{N}&=-\frac{2A\mathfrak{z}^3}{(\mathfrak{z}^2-b^2)^3}\\ \mathfrak{S}&=-\frac{4A^2\mathfrak{z}^3}{(\mathfrak{z}^2-b^2)^4}.\end{aligned}\right\} \quad (32).$$

Das Integral in (17) läßt sich leicht ausführen und die dritte Näherung bekommt, wenn man $F(\mathfrak{z})$ nach dem beim Kreisbogen erörterten Konstruktionsprinzip ermittelt, dann die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{K^{(3)}}{U}=\frac{K^{(2)}}{U}+A^3\,\Im\mathrm{m}\Bigg[&\Bigg\{-\frac{\nu_1\bar{\mathfrak{z}}^3}{2(\mathfrak{z}^2-b^2)^3}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}^2}-\frac{\bar{\mathfrak{z}}^2}{a^4}\right)+\frac{\nu_2 b^2\bar{\mathfrak{z}}^3}{2(\mathfrak{z}^2-b^2)^4}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}^2}-\frac{\bar{\mathfrak{z}}^2}{a^4}\right)+\frac{\nu_{10}\pi_1\left(-\frac{1}{\mathfrak{z}}+\frac{\bar{\mathfrak{z}}}{a^2}\right)}{4(\mathfrak{z}^2-b^2)(\bar{\mathfrak{z}}^2-b^2)}\\ &+\left(-\frac{\nu_4}{4(\mathfrak{z}^2-b^2)^3}+\frac{\nu_{10}\pi_2}{4(\mathfrak{z}^2-b^2)^2(\bar{\mathfrak{z}}^2-b^2)}\right)\left(-\bar{\mathfrak{z}}-\frac{b^2}{\bar{\mathfrak{z}}}+\frac{a^2}{\mathfrak{z}}+\frac{b^2\mathfrak{z}}{a^2}\right)-\frac{\nu_5}{4(\mathfrak{z}^2-b^2)^2}\left(\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}}-\frac{\mathfrak{z}}{a^2}\right)\\ &-\frac{\nu_6\mathfrak{z}^3}{(\mathfrak{z}^2-b^2)^5}\left(\bar{\mathfrak{z}}^2+\frac{b^4}{\bar{\mathfrak{z}}^2}-\frac{a^4}{\mathfrak{z}^2}-\frac{b^4}{a^4\mathfrak{z}^2}\right)+\frac{\nu_7\mathfrak{z}^2}{4(\mathfrak{z}^2-b^2)^2}\left[\frac{\pi_1(\mathfrak{z}^2+b^2)}{a^2(\mathfrak{z}^2-b^2)^2}+\frac{\pi_2(-5a^4\mathfrak{z}^2-3b^2\mathfrak{z}^4-b^4\mathfrak{z}^2+a^4b^2)}{a^2\mathfrak{z}^2(\mathfrak{z}^2-b^2)^3}\right]\\ &\times\left[\bar{\mathfrak{z}}+\frac{b^2}{\bar{\mathfrak{z}}}-\frac{a^2}{\mathfrak{z}}-\frac{b^2\mathfrak{z}}{a^2}\right]-\frac{\nu_8\mathfrak{z}^2}{4(\mathfrak{z}^2-b^2)}\left[\frac{\pi_1(\mathfrak{z}^2+b^2)}{a^2(\mathfrak{z}^2-b^2)^2}+\frac{\pi_2(-5a^4\mathfrak{z}^2-3b^2\mathfrak{z}^4-b^4\mathfrak{z}^2+a^4b^2)}{a^2\mathfrak{z}^2(\mathfrak{z}^2-b^2)^3}\right]\left(\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}}-\frac{\mathfrak{z}}{a^2}\right)\\ &+\frac{\nu_{11}}{4b^2(\bar{\mathfrak{z}}^2-b^2)}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}}-\frac{\bar{\mathfrak{z}}}{a^2}\right)+\frac{\nu_{11}}{8b^3}\left(\ln\frac{\mathfrak{z}-b}{\mathfrak{z}+b}\right)\left[\frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}^2-b^2}-\frac{\mathfrak{z}^2}{a^4-b^2\mathfrak{z}^2}\right]\\ &+\frac{\nu_{11}a^2}{8b^4}\left(\frac{\mathfrak{z}}{a^4-b^2\mathfrak{z}^2}-\frac{\bar{\mathfrak{z}}}{a^2(\bar{\mathfrak{z}}^2-b^2)}\right)\ln\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Bigg]\end{aligned}\right\} \quad (33),$$

wobei

$$\frac{K^{(3)}}{U} = \frac{K^{(1)}}{U} + A^2 \Im\mathrm{m}\left[\left\{-\frac{\pi_1}{\bar\vartheta^2 - b^2}\left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{\bar\vartheta}{a^2}\right) + \frac{\pi_2}{(\bar\vartheta^2 - b^2)^2}\left(\vartheta + \frac{b^2}{\vartheta} - \frac{a^2}{\bar\vartheta} - \frac{b^2\bar\vartheta}{a^2}\right)\right\}\right]$$

$$\frac{K^{(1)}}{U} = \Im\mathrm{m}\left(-\vartheta - \frac{a^2}{\vartheta}\right).$$

Führen wir jetzt den Parameter $\varepsilon = \dfrac{A}{a^2 + b^2}\cdot\mu$ ein, so erhalten wir die dritte Näherung, indem wir bei der Entwicklung nach ε bis zum Gliede in ε^3 gehen. Die Formel (33) zeigt nun aber darüber hinaus, daß $\psi^{(3)} = \mu K^{(3)}$ für $\varepsilon = 0$ nicht mehr analytisch in ε ist. Vielmehr folgt auf das Glied mit ε^3 ein Glied in $\varepsilon^4 \ln\varepsilon$ usw.[6]):

$$\frac{\psi^{(3)}}{U} = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4\ln\varepsilon + \cdots$$

Auf den dritten Schritt hat dies an sich noch keinen Einfluß, da für die Herleitung der Differentialgleichungen (2a), (2b), (2c) bzw. (3a), (3b), (3c) nur dreimalige Differenzierbarkeit von ψ nach λ gebraucht wurde. Für die weiteren Schritte ist dann natürlich aber eine besondere Sorgfalt nötig. Hier sei nur noch darauf hingewiesen, daß $\psi^{(3)}$, wenn man den Ansatz (1) für ψ dahin erweitert, daß man auf das Glied in ε^3 einen Term in $\varepsilon^4\ln\varepsilon$ folgen läßt, die Vorzahl von $\varepsilon^4\ln\varepsilon$ richtig angibt. Der Abschnitt

$$\frac{1}{U}\overline{\psi}^{(3)} = -y + g(x,y)\lambda + h(x,y)\lambda^2 + f(x,y)\lambda^3$$

von ψ genügt nämlich der Gl. (3c). Genau derselben Differentialgleichung genügt aber auch der Abschnitt:

$$\frac{1}{U}\overline{\psi}'^{(3)} = -y + g(x,y)\lambda + h(x,y)\lambda^2 + f(x,y)\lambda^3 + k_1(x,y)\lambda^4\ln\lambda.$$

Die Vorzahl $k_1(x,y)$ von $\lambda^4\ln\lambda$ erfüllt die Gleichung:

$$k_{1xx}(1-a^2) + k_{1yy} = 0.$$

Da wir (3c) durch (4c) ersetzen und für $\psi^{(3)}$ die genauen Randbedingungen von ψ vorschreiben, wird also durch $\psi^{(3)}$ auch $k_1(x,y)$ richtig erfaßt.

Wir werden also bei der Auswertung in der Entwicklung nach ε bis $\varepsilon^4\ln\varepsilon$ gehen. (Beim Beispiel A des affin verzerrten Kreisbogens hatten wir uns schon bei der Konstruktion von $K^{(3)}$ auf die Glieder bis f^3 beschränkt. Der geschlossene Ausdruck von $K^{(3)}$ bleibt analytisch in f.)

Bild 8 zeigt die Maximalgeschwindigkeit der Ellipse der Dicke $\frac{1}{10}$, wie sie sich mit der aus (33) berechneten Formel bis zu den Gliedern in $\varepsilon^4\ln\varepsilon$ ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{u_{\max}}{U} = &-1 - \varepsilon\mu + \frac{\varepsilon^2}{4}\left\{-\mu^4\left(\frac{1}{2} + \frac{\varkappa}{2}\right) + \mu^2(\varkappa - 1) + \frac{3}{2} - \frac{\varkappa}{2}\right\}\\
&+\varepsilon^3\left\{\mu^7\left(\frac{1}{12} - \frac{7\pi}{128}\right)(\varkappa+1)^2 + \mu^5\left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{5\pi}{32}\right)\varkappa^2 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{32}\pi\right)\varkappa + \frac{1}{8} - \frac{\pi}{16}\right]\right.\\
&+\mu^3\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{9\pi}{64}\right)\varkappa^2 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\varkappa + \frac{\pi}{64}\right] + \mu\left[\left(-\frac{1}{12} + \frac{\pi}{32}\right)\varkappa^2 + \left(\frac{5}{24} - \frac{3}{32}\pi\right)\varkappa - \frac{5}{24} + \frac{\pi}{8}\right]\\
&\left.+\frac{1}{\mu}\left[\frac{\pi}{128}\varkappa^2 - \frac{\pi}{64}\varkappa - \frac{3\pi}{128}\right]\right\}\\
&+\varepsilon^4(\ln\varepsilon)\left\{\mu^6\left(-\frac{7}{64}\varkappa^2 - \frac{7}{32}\varkappa - \frac{7}{64}\right) + \mu^4\left(\frac{5}{16}\varkappa^2 + \frac{3}{16}\varkappa - \frac{1}{8}\right)\right.\\
&\left.+\mu^2\left(-\frac{9}{32}\varkappa^2 + \frac{\varkappa}{4} + \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{\varkappa^2}{16} - \frac{3}{16}\varkappa + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\varkappa^2}{64} - \frac{\varkappa}{32} - \frac{3}{64}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (34).$$

[6]) Entwickelt man die Rayleighsche Näherung nach einem Parameter λ, so kommen u. U. solche logarithmische Glieder vor. Daß sie auch bei einem an die Prandtlsche Näherung anschließenden Verfahren auftreten, wurde von C. Schmieden bemerkt.

Gegenüber der zweiten Näherung hat man eine weitere Erhöhung der Übergeschwindigkeit. Zum Vergleich ist noch die Rayleighsche[7]) Näherung eingetragen. Beschränkt man sich in (34) auf die Glieder bis zum Quadrat der Machschen Zahl a, so erhält man:

$$\frac{u_{max}}{U} = -1 - \varepsilon - \frac{a^2}{2}\left[\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \varepsilon^4 \ln \varepsilon\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Dieser Ausdruck stimmt mit der nach ε entwickelten Maximalgeschwindigkeit nach der Rayleighschen Näherung überein.

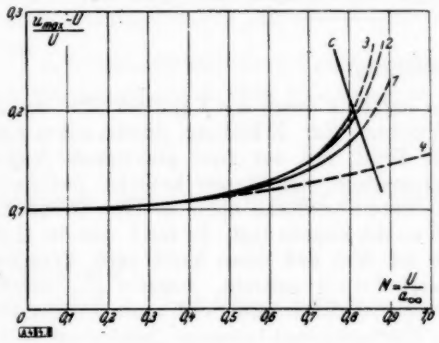


Bild 8 (links). Maximalgeschwindigkeit bei der nichtangestellten Ellipse der Dicke $\frac{1}{10}$ in Abhängigkeit der Machschen Zahl.
Kurve 1, 2, 3: erste, zweite und dritte Näherung.
Kurve 4: Rayleigh 2. Näherung (Kaplan).
U Anströmgeschwindigkeit } im Unendlichen.
a_∞ Schallgeschwindigkeit }
u_{max} Maximalgeschwindigkeit.

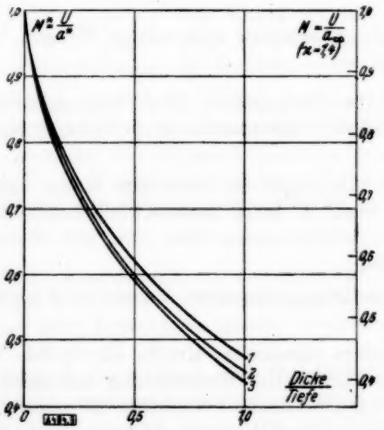


Bild 9. Die kritische Anströmgeschwindigkeit $\frac{U}{a^*}$ als Funktion des Achsenverhältnisses der Ellipse.
Kurve 1, 2, 3: erste, zweite und dritte Näherung.
U Anströmgeschwindigkeit } im Unendlichen.
a_∞ Schallgeschwindigkeit }
a^* kritische Schallgeschwindigkeit.

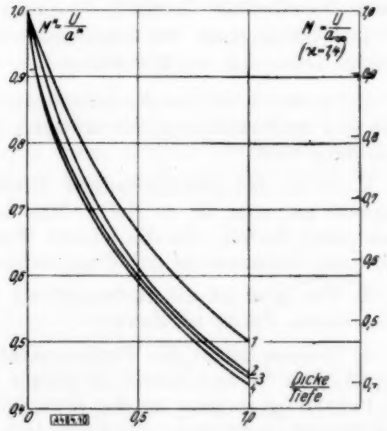


Bild 10. Die kritische Anströmgeschwindigkeit $\frac{U}{a^*}$ als Funktion des Achsenverhältnisses der Ellipse.
Kurve 1: inkompressibel.
Kurve 2: Rayleigh 2. Näherung (Kaplan).
Kurve 3: Tsien.
Kurve 4: dritte Näherung.
U Anströmgeschwindigkeit } im Unendlichen.
a_∞ Schallgeschwindigkeit }
a^* kritische Schallgeschwindigkeit.

Der Eintritt der kritischen Geschwindigkeit wird in Bild 8 durch die Kurve C angegeben. Bild 9 zeigt die kritische Anströmgeschwindigkeit als Funktion des Dickenverhältnisses. Wenn auch der ganze Kurvenverlauf bis $\varepsilon = 1$ gute Werte annimmt, waren, da wir eine Entwicklung nach der Dicke vorgenommen haben, an sich nur für kleine ε richtige Werte zu erwarten.

Bild 10 gibt einen Vergleich unserer Näherung mit den von Kaplan[7]) nach Rayleigh und Tsien[8]) nach seiner Methode erhaltenen Werten. 484

[7]) C. Kaplan: Two dimensional subsonic compressible flow past elliptic cylinders, NACA Report 624.
[8]) H. S. Tsien: Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids. J. Aeron. Sci. Bd. 6 (1939), S. 399 bis 407.

Der durch Kapillarwirkung bedingte Zusammenhalt zweier benetzter Körper.

Von *Friedrich Schiel* in Dresden.

Mitteilung aus dem Erdbauinstitut der Technischen Hochschule Dresden.

Ausgehend von der bekannten Haftungskraft zweier benetzter Kugeln gleicher Größe wird der Zusammenhalt beliebig geformter Körper untersucht. Für den Grenzwert bei verschwindender Benetzungsflüssigkeit ergeben sich bemerkenswerte Zusammenhänge mit einigen Begriffen der Differentialgeometrie.

1. Einleitung.

Der Zusammenhalt feuchten Sandbodens entsteht durch die Kapillarkräfte des an den Berührungsstellen der Körner befindlichen Wassers. Zur Erklärung dieser sogen. „scheinbaren Kohäsion" berechnete Versluys[1]) die Kraft, mit der zwei gleichgroße Kugeln zusammengehalten werden, wenn an ihrer Berührungsstelle sich Wasser befindet, das die Kugeln vollständig benetzt (Randwinkel Null). Als kapillare Oberfläche nahm er eine Drehfläche mit kreisförmigem Meridian an, die sich berührend an die Kugeln legt. Er fand, daß die Haftungskraft dem Kugelhalbmesser R verhältnisgleich ist und daß diese Kraft beim Verschwinden des Wassers durch Austrocknen dem Grenzwert $2\pi\sigma R$ zustrebt, worin σ die Oberflächenspannung des Wassers ist. In einer Kugelschüttung ist die Anzahl der Kugeln auf der Flächeneinheit $1/R^2$ verhältnisgleich, so daß die auf die Flächeneinheit bezogene „scheinbare Kohäsion" einer feuchten Kugelschüttung mit $1/R$ verhältnisgleich zunimmt, was mit dem Verhalten feuchten Sandbodens durchaus im Einklang steht.

Im Anschluß an die Ergebnisse von Versluys erheben sich einige Fragen, die im folgenden behandelt werden sollen.

1. Ist die Annahme kreisförmigen Meridians für die kapillare Drehfläche zulässig oder ergibt sich bei Einführung der richtigen, nach der Kapillaritätstheorie zu bestimmenden Form, ein anderes Bild?

2. Strebt bei unvollständiger Benetzung die Haftungskraft ebenfalls einem endlichen Grenzwert zu, oder ist er Null? Man beobachtet nämlich beim Austrocknen feuchter Sandkörper einen Zerfall, ehe die letzten Wasserspuren verschwunden sind, was mit einem Nullwerden des Grenzwertes gut übereinstimmen würde.

3. Wie groß ist die Haftungskraft bei zwei beliebig geformten, benetzten Körpern, die sich in einem Punkt berühren?

4. Werden außer der Haftungskraft auch andere (drehende) Kräfte durch das Wasser erzeugt? Das Vorhandensein derartiger Kräfte wird durch die Beobachtung nahegelegt, daß beim Benetzungsvorgang an der jeweiligen kapillaren Oberfläche ruckartige Bewegungen einzelner Körner stattfinden, die beim Auf- und Absteigen des Wassers jedesmal eine Setzung der Sandmasse bewirken, welche erst nach oftmaliger Wiederholung der Benetzung abklingt[2]).

2. Kapillare Drehflächen bei Vernachlässigung der Schwere.

Der Einfluß der Schwerkraft auf die Veränderung des Flüssigkeitsdruckes p mit der Höhe kann bei den hier beabsichtigten Untersuchungen vernachlässig' verden. Die Kapillaritätstheorie lehrt, daß der Flüssigkeitsdruck nach dem ersten Satz von Laplace der mittleren Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche verhältnisgleich ist. Bei konstantem p hat somit die kapillare Oberfläche konstante mittlere Krümmung. Die Drehflächen dieser Eigenschaft sind wohl bekannt und genau untersucht worden[3]).

Wir betrachten hier die kapillaren Drehflächen im Hinblick auf die Kraft, welche die von ihnen begrenzte Flüssigkeit zwischen zwei festen Körpern übertragen kann Aus Gleichgewichtsgründen muß sich in jedem Schnitt durch die Flüssigkeit durch Zusammensetzung der im Schnitt wirkenden Flüssigkeitsdrücke und Oberflächenspannungen dieselbe Kraft ergeben. Diese Bedingung führt ebenso zur Bestimmung der Form kapillarer Oberflächen wie die Forderung konstanter mittlerer Krümmung; die beiden Bedingungen sind identisch.

[1]) De capillaire werkingen in den bodem. Amsterdam 1916.

[2]) Über derartige Benetzungsversuche berichten Kahl, Manz und Neumann in: Bautechn. Bd. 19 (1941), S. 349 bis 352.

[3]) Siehe z. B. Plateau: Statique experimentale et théorique des liquides, chap. II., Gand, 1873.

Es werden hauptsächlich folgende Bezeichnungen verwendet:

p = Flüssigkeitsdruck.
$p_z = -p$ = Zugspannung der Flüssigkeit.
σ = Oberflächenspannung der Flüssigkeit.
r_1, r_2 = Hauptkrümmungshalbmesser der Flüssigkeitsoberfläche, positiv nach dem Flüssigkeitsinneren.
r = Halbmesser einer Flüssigkeitskugel.
P = Kraft, die eine von einer kapillaren Drehfläche begrenzte Flüssigkeitsmasse in Richtung ihrer Achse überträgt.
x/z = Ebenes Koordinatensystem zur Darstellung des Meridians der kapillaren Drehfläche (z in Richtung der Achse).
$x_1 = x_{\min}$ = Halbmesser des „Halsquerschnittes" der Drehfläche.
$x_2 = x_{\max}$
ϱ = Krümmungshalbmesser des Meridians an der Stelle $x = x_1$ (Halsquerschnitt).

Weitere Bezeichnungen werden an geeigneter Stelle erklärt.

Nach Laplace ist

$$p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

a) **Kugel.** Der Druck in einer Flüssigkeitskugel ist nach Gl. (1):

$$p = \frac{2\sigma}{r}.$$

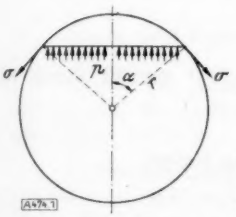


Bild 1. Flüssigkeitskugel.

In einem Schnitt nach Bild 1 wird folgende Kraft übertragen:

$$P = 2\pi r \sin\alpha \cdot \sigma \sin\alpha - \pi p r^2 \sin^2\alpha = 0.$$

Die Kugel ist die einzige kapillare Drehfläche, die ohne Anlehnung an feste Körper bestehen kann, da die von einer Kugel begrenzte Flüssigkeitsmasse keine Kraft nach außen überträgt.

b) **Katenoid.** Die Drehfläche mit der mittleren Krümmung Null ist das sogenannte Katenoid mit der Kettenlinie als Meridian (Bild 2). In einer katenoidförmigen Flüssigkeitsmasse herrscht der Flüssigkeitsdruck $p = 0$ wie unter einer ebenen Oberfläche. Die Kraft, die durch ein Katenoid in seiner Achsenrichtung übertragen wird, errechnet sich nur aus σ am Umfang des Halsquerschnittes, da $p = 0$ ist:

$$P = 2\pi\sigma x_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Jeder Schnitt senkrecht zur z-Achse liefert denselben Wert von P, wie aus den Eigenschaften der Kettenlinie leicht bewiesen werden kann.

Taucht man zwei sich berührende feste Kugeln in eine benetzende Flüssigkeit und hebt sie wieder heraus, so verbleibt um die Berührungsstelle ein Flüssigkeitsring nach Bild 3 bestehen, der um so genauer katenoidförmig ist, je kleiner die Kugeln sind, je weniger also die Schwerkraft ausmacht. Aus der Bedingung, daß die Kettenlinie als Meridian die Kugeln berühren muß, läßt sich errechnen:

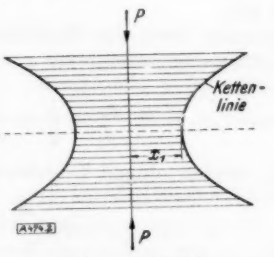


Bild 2. Katenoid.

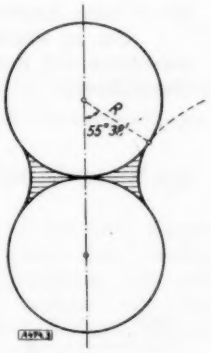


Bild 3 (rechts). Zwei Kugeln mit Katenoid.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0{,}6815\, R \\ P &= 1{,}363\,\pi\sigma R \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Setzt Verdunstung ein, so wandert die kapillare Oberfläche nach innen, p wird negativ und P nimmt zu, wie sich aus einer nach Versluys durchgeführten Näherungsrechnung mit kreisförmigem Meridian ergibt.

c) **Nodoid.** Die Gleichung des Meridians für Drehflächen mit Flüssigkeitszug $p_z = -p$ lautet[4]):

$$z = \pm\{x_2 E(\varphi, k) - x_1 F(\varphi, k)\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

[4]) Siehe z. B. Bakker: Kapillarität und Oberflächenspannung, S. 123. Leipzig 1928 (in: Handbuch der Experimentalphysik, hrsg. von Wien und Harms, Bd. 6). Die Gleichung ist erstmalig von Beer 1857 aufgestellt worden.

Darin sind $F(\varphi, k)$ und $E(\varphi, k)$ die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul

$$k = \sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2^2}},$$

während x von φ folgendermaßen abhängt:

$$x = x_2 \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

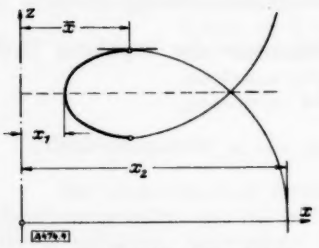


Bild 4. Meridian des Nodoids für $\alpha = 80°$.

Die Form der durch Gl. (4) gegebenen Kurve ist in Bild 4 zu sehen. Als Meridian unserer Drehfläche kommt das dick ausgezogene Stück in Frage. Die gesamte Drehfläche führt nach Plateau den Namen Nodoid.

Die Abszisse des Kurvenpunktes mit einer zur Drehachse senkrechten Tangente bezeichnen wir mit $\bar{x}$. Sie ist das geometrische Mittel aus x_1 und x_2. Führt man den Modul in der üblichen Art ein:

$$k = \sin \alpha,$$

so ergibt sich aus den gegebenen Formeln

$$\frac{x_1}{x_2} = \cos \alpha, \quad \frac{x_1}{\bar{x}} = \sqrt{\cos \alpha}.$$

Die Kraft, die durch das Nodoid übertragen wird, berechnen wir einmal durch die Kräfte im Halsquerschnitt

$$P = 2\pi\sigma x_1 + \pi x_1^2 \cdot p_z$$

und durch einen Schnitt an der Stelle $x = \bar{x}$, an der σ keinen Beitrag liefert,

$$P = \pi \bar{x}^2 p_z.$$

Durch Ausschaltung von p_z und Einführung der obigen Beziehungen erhält man

$$P = \frac{2\pi x_1 \sigma}{1 - \cos \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Je mehr sich der Modul k dem Wert 1, bzw. α dem Wert $\frac{\pi}{2}$ nähert, desto mehr nähert sich der Meridianbogen der Gestalt einer Kettenlinie, und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ geht (5) in Gl. (2) über, die für P beim Katenoid gilt.

Um zu sehen, welche Form der Meridian des Nodoids bei klein werdendem α annimmt, berechnen wir den Krümmungshalbmesser ϱ an der Stelle $x = x_1$. Nach Gl. (1) ist (ϱ positiv einzuführen)

$$\frac{p_z}{\sigma} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{x_1} = \frac{2 x_1}{\bar{x}^2 - x_1^2}$$

mit Rücksicht auf die beiden obigen Gleichungen für P. Daraus erhält man

$$\varrho = \frac{x_2 - x_1}{3 - \frac{x_1}{x_2}}.$$

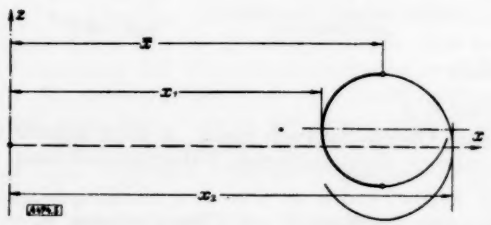


Bild 5. Nodoid mit $\alpha = 45°$.

Beim Grenzübergang $\lim \alpha = 0$ nähert sich $\frac{x_1}{x_2} = \cos \alpha$ dem Wert 1 und ϱ dem Wert $\frac{x_2 - x_1}{2}$. Mit anderen Worten: der Meridian nähert sich der Kreisform. Wegen der Annäherung von x_2 an x_1 bei $\lim \alpha = 0$ wird dabei ϱ klein gegen x_1. In Bild 5 ist der Meridian für $\alpha = 45°$ gezeichnet, und man erkennt, daß er von der Kreisform selbst bei diesem großen Winkel nur noch wenig abweicht.

Die Kraft P wird für $\alpha = 0$ im allgemeinen unendlich groß. Wenn gleichzeitig $x_1 = 0$ wird, ist P unbestimmt. Welchen Grenzwert P annimmt, hängt davon ab, wie die beiden

Grenzübergänge $\lim \alpha = 0$ und $\lim x_1 = 0$ miteinander verbunden sind, und man kann nach obigem zur Berechnung des Grenzwertes von P die Meridianlinie kreisförmig annehmen, sofern es sich um einen Meridian in einem engen Spalt handelt (ϱ klein gegen x_1).

Die Drehflächen mit positivem p (Unduloid und äußerer Teil des Nodoids) werden hier nicht benötigt und daher übergangen.

3. Grenzwert der Haftungskraft zweier benetzter Kugeln.

a) **Vollständige Benetzung.** In der eingangs erwähnten Arbeit hat Versluys für die Haftungskraft P zweier Kugeln eine Formel aufgestellt, die für das Verschwinden der benetzenden Flüssigkeit einen unbestimmten Ausdruck liefert, der sich der Grenze $2\pi R\sigma$ nähert. Man kann diesen Grenzwert unmittelbar erhalten (siehe Bild 6). Wir bezeichnen den Halbmesser des Halsquerschnittes wieder mit x_1 und mit z die Ordinate der Benetzungsgrenze nach Bild 6. Wenn x_1 klein gegen R und somit z klein gegen x_1 ist, gilt näherungsweise

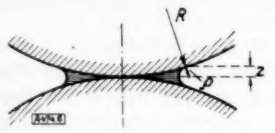


Bild 6. Zwei Kugeln.

$$z \approx \varrho \approx \frac{x_1^2}{2R},$$

$$p_z = \sigma\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{x_1}\right) \approx \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{2\sigma R}{x_1^2},$$

$$P = \pi x_1^2 p_z + 2\pi x_1 \sigma = 2\pi\sigma R + 2\pi\sigma x_1,$$

$$\lim_{x_1 = 0} P = 2\pi\sigma R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Durch die vollständige Verdunstung wächst die Zugspannung der Flüssigkeit von 0 auf ∞, und die Haftungskraft nimmt von dem Wert nach Gl. (3) auf jenen nach Gl. (6), also um knapp 50 % zu.

b) **Unvollständige Benetzung.** Bildet die Flüssigkeit mit den festen Kugeln einen Randwinkel ϑ, so läßt sich der Grenzwert von P durch eine ähnliche Näherungsrechnung erhalten (siehe Bild 7)

$$z \approx \varrho \cdot \cos\vartheta \approx \frac{x_1^2}{2R}.$$

Die Näherung ist zulässig, solange $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, und wir beschränken uns auf dieses Intervall.

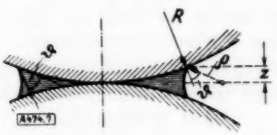


Bild 7. Unvollständige Benetzung.

$$p_z \approx \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{2\sigma R\cos\vartheta}{x_1^2},$$

$$\lim_{x_1 = 0} P = 2\pi\sigma R\cos\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Der Grenzwert ist nicht Null, sondern endlich, solange $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ ist. Das Zerfallen von feuchten Sandkörpern vor restloser Austrocknung kann also nicht an unvollständiger Benetzung liegen, sondern muß andere Ursachen haben.

4. Beliebiger Körper und Berührungsebene.

a) **Grenzwert der Haftungskraft.** Bei der Ableitung der Gl. (6) für P bei zwei Kugeln konnten wir bemerken, daß infolge des Unendlichwerdens von p_z das Glied mit σ neben jenem mit p_z vernachlässigt werden konnte. Aufbauend auf dieser Feststellung läßt sich eine entsprechende Näherungsrechnung für die Haftungskraft anstellen, welche beim Verdunsten einer Flüssigkeitsmenge entsteht, die den Berührungspunkt eines beliebigen Körpers mit seiner Berührungsebene umgibt.

Wir setzen voraus, daß die Oberfläche des Körpers an der Berührungsstelle stetig und bauchig gekrümmt oder der Berührungspunkt ein elliptischer Flächenpunkt ist, schalten also parabolische Flächenpunkte aus, während sich sattelförmige Krümmung oder hyperbolische Flächenpunkte von selbst erübrigen.

Die Abstände der Benetzungsgrenze von der Berührungsebene bezeichnen wir wieder mit z und legen in diese Ebene ein Koordinatensystem, dessen Achsen x/y mit den Hauptkrümmungsrichtungen der Körperoberfläche zusammenfallen. Außerdem verwenden wir folgende Bezeichnungen:

n_x, n_y = Krümmungen $(1/r)$ der Hauptnormalschnitte der Körperoberfläche,
x_1, y_1 = kleinste Entfernungen der kapillaren Oberfläche von der Flächennormalen, gemessen in Richtung der Achsen.

Bei fortschreitender Verdunstung des Flüssigkeitsrestes nähert sich die Projektion des Halsquerschnittes auf die Berührungsebene der Gestalt der Dupinschen Kennfigur[5]). Der Abstand z (Bild 8) ist beim Grenzübergang längs des ganzen Umfanges der Kapillarfläche konstant und es ist näherungsweise

$$z \approx \frac{n_x}{2} x_1^2 = \frac{n_y}{2} y_1^2 .$$

Bezeichnen wir die Fläche der Ellipse mit den Halbachsen x_1, y_1 mit J, so ist demnach

$$J = \frac{2\pi z}{\sqrt{n_x n_y}} = \frac{2\pi z}{\sqrt{K}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

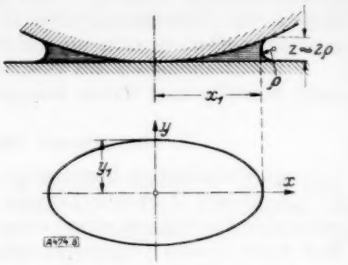


Bild 8. Flüssigkeitsrest in Form der Dupinschen Kennfigur.

worin $K = n_x n_y$ das Gaußsche Krümmungsmaß der Körperoberfläche ist. Auf dieser Fläche J wirkt die Zugspannung

$$p_z \approx \frac{\sigma}{\varrho} \approx \frac{\sigma}{z/2}$$

und man erhält

$$P = \frac{4\pi\sigma}{\sqrt{K}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Es ließe sich hier ebenso wie bei den zwei Kugeln eine Näherungsrechnung für den Fall unvollständiger Benetzung anstellen, doch wollen wir uns hier und im folgenden aus Raumgründen auf den wichtigsten Fall der vollständigen Benetzung beschränken.

b) **Gleichgewichtslagen des Körpers.** Der Körper kann sich in bezug auf die Kraft P nur dann im Gleichgewicht befinden, wenn P in Richtung der Flächennormalen durch den Berührungspunkt geht. Dies wird um so genauer zutreffen, je kleiner die Flüssigkeitsmenge ist, d. h. je mehr sich ihre Form der Dupinschen Kennfigur annähert. Bei endlicher Größe der Flüssigkeitsmenge liegt ihre äußere Begrenzungsfläche nicht genau symmetrisch zur x- und y-Achse, so daß die Kraft P nicht genau im Berührungspunkt angreift. Infolgedessen hat der Körper das Bestreben, auf seiner Berührungsebene abzurollen. Das Drehmoment, das den Körper dabei antreibt, wird offenbar beim Verdunsten mit z zusammen gleich Null, strebt also nicht einem endlichen Grenzwert zu wie die Haftungskraft.

Das größtmögliche abrollende Moment läßt sich nicht in allgemeingültiger Form angeben, da es von der gesamten Oberflächenform des Körpers abhängt. Wir wollen daher die Frage nach dem abrollenden Moment in folgender beschränkter Form lösen: 1. in welcher Richtung rollt der Körper und 2. in welcher Lage befindet er sich im Gleichgewicht? Wir nehmen an, daß die Flüssigkeitsmenge V, die den Berührungspunkt umgibt, beim Abrollen unverändert bleibt. Es läßt sich zeigen, daß bei kleinem z die mittlere Entfernung der Körperoberfläche von ihrer Berührungsebene für das ganze Gebiet der Kennfigur gleich der halben Randentfernung z ist. Dementsprechend ergibt sich die Flüssigkeitsmenge V

$$V = J \cdot \frac{z}{2} .$$

Schaltet man aus dieser Gleichung und aus (8) den Abstand z aus, so erhält man:

$$J = \frac{2\sqrt{\pi V}}{\sqrt[4]{K}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Der Körper wird so abrollen, daß sich die freie Oberflächenenergie der Flüssigkeit vermindert, und wird dann eine Gleichgewichtslage einnehmen, wenn diese Energie einen extremen Wert hat. Bezeichnen wir mit F die gesamten, der Flüssigkeit zugänglichen festen Oberflächen (abrollender Körper und Berührungsebene), so ist die gesamte Flüssigkeitsoberfläche

$$F - 2J,$$

da sowohl auf dem Körper als auch auf der Berührungsebene von der gesamten benetzten festen Oberfläche ein Stück von der Größe J fehlt. Dabei ist das ringförmige Stück Flüssigkeitsoberfläche von der Höhe z längs des Umfanges der Kennfigur gegenüber J vernachlässigt, was bei der vorausgesetzten Kleinheit von z zulässig ist.

Die freie Oberflächenenergie ist somit

$$E = \sigma (F - 2J).$$

[5]) Diesen Verdeutschungsvorschlag für „Indikatrix", sowie wertvolle Ratschläge hinsichtlich der im folgenden verwendeten Benennungen neuer Begriffe verdanke ich meinem Bruder Theodor Schiel in Berlin. Durch die Zusammenstellung des Wortes „Kennfigur" mit „Dupin", dem Namen des Urhebers, ist wohl ohne weitere Erklärung verständlich, was gemeint ist.

Beim Abrollen um ein Stück ds ist das Energiegefälle

$$-\frac{dE}{ds}=+2\sigma\frac{dJ}{ds}.$$

Aus Gl. (10) folgt:

$$\frac{dJ}{ds}=-\frac{\sqrt{\pi V}}{2\sqrt[4]{K^5}}\cdot\frac{dK}{ds},$$

$$-\frac{dE}{ds}=-\frac{\sigma\sqrt{\pi V}}{\sqrt[4]{K^5}}\cdot\frac{dK}{ds}.$$

Den Ausdruck $-\frac{dK}{ds}$ kann man das Krümmungsgefälle nennen. Der Körper rollt in jener Richtung ab, in der das Krümmungsgefälle am größten ist. Das Energiegefälle liefert dimensionsmäßig nicht ein Moment, sondern eine Kraft, so daß statt des oben gebrauchten Ausdruckes „abrollendes Moment" genauer „abrollende Kraft" zu sagen wäre.

Um sich ein vollständiges Bild vom Verhalten des Körpers zu machen, muß man auf seiner Oberfläche jene Punkte verbinden, in denen das Gaußsche Krümmungsmaß denselben Wert hat. Es ergibt sich die Schar der „Linien gleichen Krümmungsmaßes". Senkrecht zu diesen ist das Krümmungsgefälle am größten. Die verschiedenen möglichen, jeweils in Richtung des größten Krümmungsgefälles verlaufenden Linien bilden eine weitere Schar; man kann sie die „Krümmungsfallinien" nennen. Die Krümmungsfallinien gehen von den Krümmungsmaxima aus und vereinigen sich in den Krümmungsminima.

Ähnlich wie eine schwere Kugel auf einer schiefen Ebene in Richtung der „Fallinie" abrollt, wird ein gewichtslos gedachter benetzter Körper, der mit irgendeinem Punkt seiner Oberfläche auf eine benetzte Ebene aufgesetzt wird, längs seiner durch diesen Punkt gehenden Krümmungsfallinie abrollen. Er wird erst zur Ruhe kommen, wenn sein Berührungspunkt mit einem Krümmungsminimum seiner Oberfläche zusammenfällt, wobei er eine stabile Gleichgewichtslage erreicht hat. Setzt man ihn mit einem Krümmungsmaximum auf, so befindet er sich im labilen Gleichgewicht. Man kann also kurz sagen, die benetzende Flüssigkeit veranlaßt den Körper, sich „möglichst flach" auf die Ebene zu legen, was sich am Verhalten kleiner wasserbenetzter Körper leicht bestätigen läßt. Bei größeren Körpern müßte man den Einfluß der Schwerkraft z. B. dadurch ausschalten, daß man außer der benetzenden Flüssigkeitsschicht eine zweite Flüssigkeit verwendet, die den ganzen Körper umgibt und seine Schwere durch Auftrieb aufhebt.

Bei Drehflächen sind die Parallelkreise Linien gleichen Krümmungsmaßes und die Meridiane Krümmungsfallinien. Bei Drehflächen sind also die Krümmungsfallinien gleichzeitig Krümmungslinien, was bei beliebigen Flächen nicht der Fall ist. Drehflächen haben außerdem die Eigentümlichkeit, daß die Krümmungsminima meist längs eines ganzen Parallelkreises auftreten. Ein spindelförmiger Drehkörper nach Bild 9, oben, ist daher abgesehen von der Schwerkraft immer im indifferenten Gleichgewicht, wenn er mit seinem größten Parallelkreis auf eine benetzte Ebene gesetzt wird. Eine flachgedrückte Spindel nach Bild 9, unten, ist dagegen auf der flachen Stelle aufsitzend immer im stabilen Gleichgewicht.

Das Bestreben des Körpers abzurollen wächst mit der Größe des Krümmungsgefälles („Feldstärke").

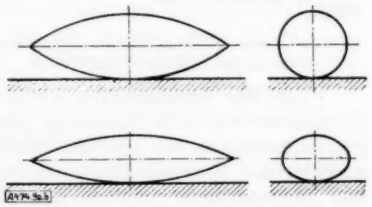


Bild 9 oben: spindelförmiger Drehkörper, unten: flachgedrückte Spindel.

5. Zwei beliebige Körper.

a) **Darstellung der Krümmungsverhältnisse am Berührungspunkt.** Wir setzen stetige Krümmung der beiden Körperoberflächen voraus, wollen uns aber nicht auf elliptische Punkte beschränken. Wir setzen nur voraus, daß die beiden Oberflächen sich berühren, ohne sich zu durchdringen, was auch bei gegenseitigen Verdrehungen um die gemeinsame Flächennormale zutreffen soll. Auf das Abrollen der beiden Körper aufeinander gehen wir nicht ein. Es soll z. B. dadurch verhindert sein, daß sich zwei Krümmungsminima gegenüberliegen.

Um die Verhältnisse leichter übersehen zu können, bedienen wir uns einer zeichnerischen Darstellung des Eulerschen Satzes über die Krümmung der Normalschnitte einer Fläche:

$$n=n_1\cos^2\varphi+n_2\sin^2\varphi.$$

Zwischen diesen Krümmungen und den Normalspannungen eines ebenen Spannungszustandes besteht eine vollständige Analogie (Krümmungstensor — Spannungstensor), so daß man eine dem Mohrschen Spannungskreis entsprechende Darstellung der Krümmungen benützen kann. Wir nennen diese Darstellung das Krümmungsbild (Krümmungskreis würde zu Mißverständnissen führen).

Trägt man (siehe Bild 10) auf einer Achse die beiden Hauptkrümmungen n_1 und n_2 auf und zeichnet über $n_1 - n_2$ als Durchmesser einen Kreis, so läßt sich für jeden Winkel φ eines Normalschnittes mit dem Hauptnormalschnitt n_1 nach Bild 10 die Krümmung n ablesen. Der Abstand des Kreismittelpunktes vom Ursprung der n-Achse ist die mittlere Krümmung $m = \frac{n_1 + n_2}{2}$. Das geometrische Mittel aus n_1 und n_2, das gleich der Wurzel aus dem Gaußschen Krümmungsmaß ist, läßt sich als Länge der Kreistangente ablesen. Bild 10a ist die Darstellung eines bauchig gekrümmten (elliptischen) Punktes. Bei parabolischen Punkten (Bild 10b) geht der Kreis durch den Anfangspunkt der Krümmungsachse. Bei sattelförmig gekrümmten (hyperbolischen) Punkten läßt sich $\sqrt{-K}$ nach Bild 10c ablesen.

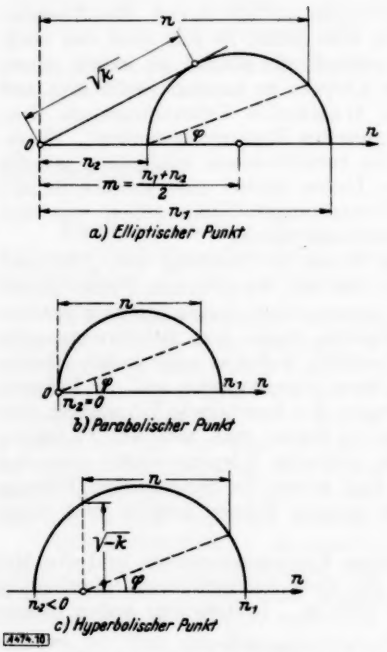


Bild 10. Darstellung des Eulerschen Satzes durch das „Krümmungsbild".

Bild 11 (rechts). Berührung zweier Körperoberflächen.

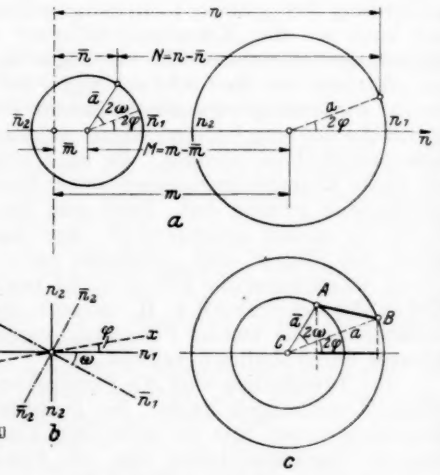


Bild 12. Krümmungsbild zweier sich berührender Flächen.

Auf der gemeinsamen Flächennormalen der beiden sich berührenden Körperoberflächen bezeichnen wir eine Richtung als positiv. Alle Krümmungen, die vom positiven Ende der Flächennormalen aus gesehen erhaben erscheinen, seien positiv, die hohlen negativ. Die Krümmungen der Normalschnitte der einen Fläche bezeichnen wir mit n, die der anderen mit $\bar{n}$, den gegenseitigen Abstand der Flächen, gemessen senkrecht zur gemeinsamen Berührungsebene, mit z. Für einen Punkt im sehr kleinen Abstand x vom Berührungspunkt gilt (siehe Bild 11) näherungsweise

$$z \approx (n - \bar{n}) \frac{x^2}{2}.$$

Wir definieren

$$N = n - \bar{n}$$

als die „gegenseitige Krümmung" der beiden Flächen.

Für die gegenseitige Krümmung N, gebildet für alle Richtungen in der Berührungsebene, gilt der Eulersche Satz. Es gibt also zwei Extremwerte N_1, N_2 und für die Richtung, die mit der Richtung von N_1 den Winkel φ einschließt, ist

$$N = N_1 \cos^2 \varphi + N_2 \sin^2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Es erübrigt sich die Führung eines unmittelbaren Beweises aus dem Bestehen des Eulerschen Satzes für n und $\bar{n}$, da die Voraussetzungen seiner Herleitung, nämlich die Darstellungsmöglichkeit der Abstände einer Fläche von ihrer Berührungsebene durch eine Potenzreihe, auch für die gegenseitigen Abstände der beiden Flächen erfüllt ist, wenn voraussetzungsgemäß am Berührungspunkt beide Flächen stetig sind.

Aus (11) folgt, daß der geometrische Ort gleicher Abstände z der beiden Flächen mit klein werdendem z die Gestalt eines Kegelschnittes annimmt. Wir nennen ihn die Be-

rührungskennfigur der beiden Flächen und unterscheiden dementsprechend elliptische, parabolische und hyperbolische Berührung zweier Flächen. Bei Berührung ohne Durchdringung ist die Kennfigur eine Ellipse. Aus den beiden gegenseitigen Hauptkrümmungen N_1, N_2 berechnen wir das „Maß der gegenseitigen Krümmung"

$$K = N_1 N_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Die Dupinsche Kennfigur und das Gaußsche Krümmungsmaß ergeben sich als Sonderfälle, wenn eine der beiden Flächen eben ist.

Die Berührungskennfigur und die Werte N_1, N_2 und K ändern sich bei gegenseitigen Verdrehungen der beiden Körper um die gemeinsame Flächennormale im Berührungspunkt. Der Verlauf dieser Größen bei Verdrehungen läßt sich am Krümmungsbild verhältnismäßig einfach verfolgen. In Bild 12a wurden die Hauptkrümmungen beider Körper am Berührungspunkt auf dieselbe n-Achse aufgetragen und durch Zeichnuug der beiden Kreise mit den Halbmessern $a = \frac{n_1 - n_2}{2}$ und $\bar{a} = \frac{\bar{n}_1 - \bar{n}_2}{2}$ das Krümmungsbild erhalten. Die mittleren Krümmungen der beiden Flächen seien m und $\bar{m}$, und wir bezeichnen

$$M = m - \bar{m}$$

als die „mittlere gegenseitige Krümmung". Die Hauptkrümmungsrichtung $\bar{n}_1$ sei gegenüber n_1 um den Winkel ω verdreht, und der Normalschnitt $x - x$ (siehe Bild 12b), für den wir die gegenseitige Krümmung N bestimmen wollen, schließe mit n_1 den Winkel φ, mit $\bar{n}_1$ den Winkel $\varphi + \omega$ ein. Die Krümmungen n und $\bar{n}$ können für diese Schnittrichtung aus Bild 12a entnommen werden, und es ist $N = n - \bar{n}$. Man erkennt aus Bild 12c, daß N gleich der Summe von M und der Projektion der Strecke AB auf die n-Achse ist. Läßt man bei festgehaltenem ω (feste Lage der beiden Körper) φ wachsen (Drehung der Normalschnittebene), so durchläuft diese Projektion bei Drehung des Dreieckes ABC den Bereich $-\overline{AB}$ bis $+\overline{AB}$. Demnach ist

$$N_{\max} = N_1 = M + \overline{AB},$$
$$N_{\min} = N_2 = M - \overline{AB}$$

und das Maß der gegenseitigen Krümmung ist

$$K = N_1 N_2 = M^2 - \overline{AB}^2,$$

oder

$$K = M^2 - a^2 - \bar{a}^2 + 2a\bar{a}\cos 2\omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13).$$

Wenn sich die beiden Hauptnormalschnittebenen beider Körper decken, also für $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$, nimmt K extreme Werte an. Die Darstellung dieser Werte im Krümmungsbild wird im nächsten Abschnitt erörtert.

b) **Grenzwert der Kräfte im Berührungspunkt.** Bei Betrachtung der kapillaren Drehfläche konnten wir davon ausgehen, daß die in jedem Schnitt durch diese Fläche angreifenden Flüssigkeitsdrücke p und Oberflächenspannungen σ als Resultierende stets dieselbe Kraft P ergeben müssen. Im vorliegenden allgemeinen Fall muß an die Stelle der Kraft P ein räumliches Kraftkreuz treten, das wir durch eine Kraft P in Richtung der Flächennormalen und ein um diese Linie drehendes Drehmoment D bestimmen.

An der Berührungskennfigur lassen sich zur Berechnung von P dieselben Überlegungen anstellen wie an der Dupinschen Kennfigur bei Herleitung der Gl. (9). Es gilt daher unverändert

$$P = \frac{4\pi\sigma}{\sqrt{K}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

nur bedeutet hier K nicht das Gaußsche Krümmungsmaß, sondern das Maß der gegenseitigen Krümmung.

Eine genaue Ermittlung des Drehmomentes D bei gegebener Form der beiden sich berührenden Körper ist hier nicht beabsichtigt, sondern es sollen die Werte von D ermittelt werden, die sich bei fortschreitender Verdunstung der Flüssigkeit einstellen. Wir machen ganz entsprechende Näherungsannahmen wie bei der Behandlung des Abrollens eines Körpers auf einer Ebene: Die Flüssigkeitsmenge sei so gering, daß sich ihre Form der „Berührungskennfigur" genügend annähert, und daß die freie Flüssigkeitsoberfläche, die sich in Höhe des gegenseitigen Flächenabstandes z ausbildet, gegenüber der Fläche der Kennfigur vernachlässigt werden kann. Weiter nehmen wir an, daß bei gegenseitigen Verdrehungen der beiden Körper die Flüssigkeitsmenge V erhalten bleibt.

Der Flächeninhalt J der Berührungskennfigur läßt sich durch ganz entsprechende Überlegungen finden wie bei der Herleitung von Gl. (8), und es ergibt sich

$$J = \frac{2\pi z}{\sqrt{K}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15),$$

worin K das Maß der gegenseitigen Krümmung ist. Für die Flüssigkeitsmenge gilt wie bei der Dupinschen Kennfigur

$$V = J \cdot \frac{z}{2}, \qquad J = \frac{2\sqrt{\pi V}}{\sqrt[4]{K}}.$$

Wir berechnen wieder die gesamte freie Oberflächenenergie:

$$E = \sigma (F - 2J) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Bei einer gegenseitigen Verdrehung beider Körper um den Winkel ω ändert sich E, und das durch die Flüssigkeit ausgeübte Drehmoment ist gleich dem Energiegefälle:

$$D = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega} = +2\sigma \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\omega}, \qquad \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{\pi V}{\sqrt[4]{K^5}} \cdot \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\omega},$$

nach (13) ist: $\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\omega} = -4\,a\,\bar{a}\sin 2\omega$ und mit $a = \dfrac{n_1 - n_2}{2}$, $\bar{a} = \dfrac{n_1 - \bar{n}_2}{2}$,

schließlich

$$D = \sigma \sqrt{\pi V}\,(n_1 - n_2)\,(\bar{n}_1 - \bar{n}_2) \cdot \frac{\sin 2\omega}{\sqrt[4]{K^5}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Das Drehmoment D ändert sich periodisch mit ω und ist an den Stellen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$ gleich Null, an denen K und damit P nach Gl. (14) Extremwerte hat. Für diese Stellen können die Werte von K, die der Haftungskraft P umgekehrt proportional sind, nach Bild 13 als geometrische Mittelwerte von N_1 und N_2 aus dem Krümmungsbild entnommen werden. Die stabile Gleichgewichtslage ist dadurch gekennzeichnet, daß die Werte N_1 und N_2 die größtmögliche Verschiedenheit aufweisen, oder die Exzentrizität der Kennfigur-Ellipse am größten ist. Handelt es sich um zwei bauchig gekrümmte Körper, die sich mit ihren erhabenen Seiten berühren, so decken sich in der stabilen Gleichgewichtslage die Richtungen geringster Krümmung. Ist der Berührungspunkt auf einer der beiden Körperoberflächen Nabelpunkt ($n_1 = n_2$), so ist D beständig Null, wie sich aus (17) ergibt.

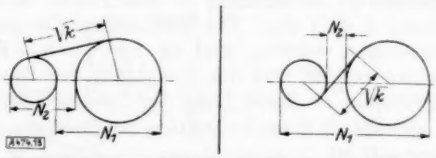


Bild 13. Krümmungsbild für die Gleichgewichtslagen.

Krümmungsmaß:	K_{max}	K_{min},
Haftungskraft:	P_{min}	P_{max},
Fläche der Kennfigur:	J_{min}	J_{max},
Oberflächenenergie:	E_{max}	E_{min},
Gleichgewicht:	labil	stabil.

Für den Fall, daß die Stetigkeitsbedingung nicht erfüllt ist und der eine Körper am Berührungspunkt eine Spitze hat, läßt sich leicht beweisen, daß die Haftungskraft beim Verschwinden der Flüssigkeit dem Wert Null zustrebt ($K = \infty$ in (14)). Diese Tatsache kann für das erwähnte vorzeitige Zerfallen feuchter Sandkörper mit verantwortlich sein, da infolge der Kristallstruktur selbst scheinbar ganz rundliche Sandkörner feine Ecken und Kanten haben.

c) **Zusammenfassung.** Bringt man zwei stetig gekrümmte Körperoberflächen, die mit einer benetzenden Flüssigkeitsschicht bedeckt sind, in Berührung, so werden durch die Oberflächenspannung Kräfte hervorgerufen, die zwischen den beiden Körpern wirken. Zu ihrer kurzen Kennzeichnung wurde der Begriff der „Berührungskennfigur" zweier Flächen eingeführt, die, entsprechend der an einer berührenden Ebene auftretenden Dupinschen Kennfigur, als geometrischer Ort gleicher Flächenabstände definiert ist.

Die Kapillarkräfte suchen die beiden Körper so aufeinander abzuwälzen und zu drehen, daß eine gegebene, den Berührungspunkt umgebende kleine Flüssigkeitsmenge V eine möglichst große Fläche J in Form der Berührungskennfigur bedeckt — mit anderen Worten: die Körper legen sich „möglichst flach" aneinander. Die Haftungskraft, die mit abnehmender Krümmung zunimmt, ist in der stabilen Gleichgewichtslage am größten. Ist der eine Körper eben oder kugelig gekrümmt (Nabelpunkt!), so findet kein Drehen, sondern nur Abwälzen statt. Es erfolgt längs der „Krümmungsfallinien" des anderen Körpers in der Richtung der stärksten Abnahme des Gaußschen Krümmungsmaßes.

Wenn die den Berührungspunkt umgebende Flüssigkeitsmenge abnimmt und allmählich verschwindet, strebt die Haftungskraft einem endlichen Grenzwert zu, während die abwälzenden und drehenden Kräfte Null werden. Alle diese Kräfte teilen mit den übrigen kapillaren Erscheinungen die Eigenschaft, bei abnehmender Körpergröße (= Korngröße im Sand) gegenüber Massenkräften an Bedeutung zuzunehmen.

Die gefundenen Erscheinungen kann man dazu verwenden, um die Krümmungslinien einer Fläche wiederzugeben. Man kann dazu einen Körper nach Bild 9, unten, benützen. Legt man diesen „Krümmungskompaß[6])" auf eine benetzte Fläche, so dreht er sich in die Richtung

[6]) Diese Bezeichnung verdanke ich Herrn W. Bernatzik, Dresden.

des einen Hauptnormalschnittes der Fläche. Denkt man sich die Fläche als sehr dünne Schale körperlich verwirklicht und legt auf den gegenüberliegenden Punkt der benetzten Rückseite den Krümmungskompaß, so zeigt er die Richtung des anderen Hauptnormalschnittes an. Das „Direktionsmoment" nimmt mit zunehmender Angleichung der beiden Hauptkrümmungen aneinander ab, und an Nabelpunkten bleibt der Krümmungskompaß in jeder Lage in Ruhe. 474

Zur Triebstockverzahnung.

Von *Walter Wunderlich* in Kiel.

Die bei der Triebstockverzahnung mit auf dem Teilkreis angeordneten Triebstockmittelpunkten auftretende Unstimmigkeit wird gestalts- und zahlenmäßig untersucht. Der an sich geringe Fehler kann durch eine kleine Verschiebung der Triebstöcke gegen die Radmitte behoben werden. Die Mindestverschiebung wird berechnet und ebenso wie die Fehlerschranke nomographisch dargestellt.

Im Rahmen des Kapitels „Verzahnungen" taucht in den meisten Lehr- und Handbüchern der Kinematik und Getriebelehre, wie auch in den Vorlesungen immer wieder das Beispiel der Triebstockverzahnung auf, trotz ihrer untergeordneten Bedeutung, wohl wegen ihrer offensichtlichen Einfachheit. Dabei ist gerade hier eine grundsätzliche Schwierigkeit vorhanden, die — bewußt oder unbewußt — fast stets übergangen wird, da die übrigen Sonderformen (Evolventen- und Zykloidenverzahnungen) nichts Derartiges aufweisen. Im vorliegenden Aufsatz wird die bei der üblichen Annahme zwangläufig auftretende Unstimmigkeit der Triebstockverzahnung zahlenmäßig untersucht. Gleichzeitig wird gezeigt, daß der an sich sehr kleine Fehler durch eine geringe Abänderung gänzlich behoben werden kann.

§ 1. Der Fehler der Triebstockverzahnung.

Bei der Triebstockverzahnung sind bekanntlich auf dem Umfang des einen Rades in regelmäßigen Abständen achsenparallele zylindrische Zapfen oder Rollen — die Triebstöcke — angeordnet, die im Verlauf der Drehung in die entsprechenden Zahnlücken des anderen Rades eingreifen. Es sind demnach die Zahnflanken für das erste Rad in Kreisform p_1 vorgegeben, wodurch das Zahnprofil p_2 des zweiten Rades bestimmt ist und nach einem der üblichen allgemeinen Verfahren konstruiert werden kann. Man kann etwa den ersten Wälzkreis k_1 auf dem zweiten abrollen lassen und hierbei die Hüllkurven p_2 der mitgenommenen Kreise p_1 ermitteln, wobei es natürlich nur auf die inneren Äste ankommt.

Da die Mittelpunkte M der Triebstöcke fast ausnahmslos auf dem Wälzkreis angenommen werden, beschreiben sie bei der Rollung Zykloiden m, und die Gegenprofile p_2 sind deren Parallelkurven im Abstand s, wenn s den Halbmesser von p_1 bezeichnet (Bild 1). In dem Augenblick, in dem der Mittelpunkt M auf dem festen Teilkreis k_2 aufsetzt, befindet er sich in einer Spitze seiner Bahn, die Zahnflanke p_2 nimmt im Punkt P auf der Berührungstangente von k_1 und k_2 ihren Anfang, während die symmetrische Flanke $\bar{p}_2$ im Gegenpunkt $\bar{P}$ zu Ende ist. Zwischen P und $\bar{P}$ fügt sich als Verbindung zwanglos ein Halbkreis vom Halbmesser s ein, der die Zahnlücke schließt. Da er sich in P und $\bar{P}$ berührend anschließt, scheint alles in bester Ordnung zu sein[1]).

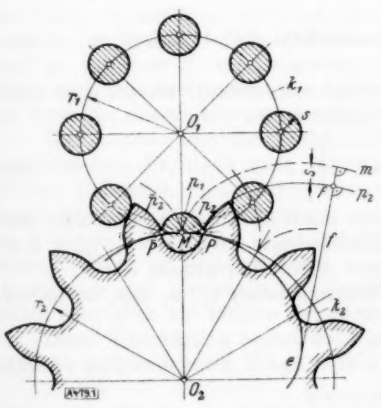


Bild 1.

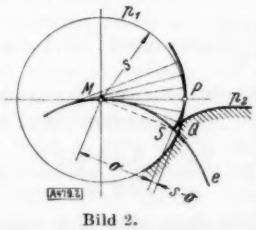


Bild 2.

Und doch ist dies nicht der Fall, wenn man die Stelle P etwas genauer unter die Lupe nimmt. Das Profil p_2 hat nämlich eine Spitze S! Dies wird klar, wenn man sich p_2 durch Abwicklung der Evolute e von m erzeugt denkt, die bekanntlich eine zu m ähnliche Zykloide ist. Bei der Aufwicklung des gespannten Fadens f auf e beschreibt sein Endpunkt F das Profil p_2, setzt einmal in S mit einer Spitze senkrecht auf e auf und setzt dann die Bahn gegenläufig fort, bis er in P den Kreis p_1 oskulierend durchsetzt. Die Spitze S liegt mithin im Innern des Kreises p_1, so daß dieser das Gegenprofil p_2 außer in P noch in einem Punkt Q trifft, wo p_2 dann eine stumpfe Ecke erhält (Bild 2). Die Zahnlücke wird daher nicht von einem Halbkreis, sondern von

[1]) Z. B. L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik" Bd. I, Leipzig 1888, S. 191 f.; A. Schiebel: „Zahnräder" I. T., Berlin 1922, S. 103.

einem etwas kürzeren Bogen $Q\overline{Q}$ gebildet, und vom eigentlichen Zahnprofil geht das Stück QSP verloren. ***Die Triebstockverzahnung läßt sich somit überhaupt nicht einwandfrei ausführen, wenn die Triebstockmitten auf dem Teilkreis liegen.***

Dieser Umstand ist es wohl, der Hartmann[2]) veranlaßt, die Triebstockverzahnung kurzweg und vollständig abzulehnen, „weil sie in der Nähe des Teilkreises unrichtig wird".

Nun, so schlimm ist die Sachlage wiederum nicht. Die Differenzen sind überaus klein, für Präzisionsübertragungen wird die Triebstockverzahnung sowieso nicht verwendet und ein gewisses Flankenspiel ist ja immer vorhanden. Überdies können — ja sollen sogar — mehrere Triebstöcke gleichzeitig im Eingriff stehen.

§ 2. Abschätzung des Flankenspiels.

Das größte durch die Unstimmigkeit der Triebstockverzahnung verursachte fehlerhafte Flankenspiel ist dem Betrage nach gleich dem Abstand der Profilecke Q vom Bogen PS (Bild 2). Wir gelangen zu einer Abschätzung, indem wir die Entfernung der Profilspitze S vom Triebstockumfang p_1 berechnen. Da dessen Halbmesser s als Bogen MS auf die Evolute e aufgewickelt erscheint, handelt es sich um die Bestimmung des Überschusses des Zykloidenbogens $\overset{\frown}{MS}=s$ über die zugehörige Sehne $\overline{MS}=\sigma$.

Wir setzen zu diesem Zwecke die Zykloide e in Parameterdarstellung an:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sin b\tau + b\sin a\tau \\ y &= a\cos b\tau + b\cos a\tau \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Bezeichnen r_1 und r_2 die Rollkreisradien der Zykloide m, so geht diese in ihre Evolute e durch ähnliche Verkleinerung im Verhältnis $r_2:(2r_1+r_2)$ über und es ist

$$a=\frac{(r_1+r_2)\,r_2}{2r_1+r_2}, \qquad b=\frac{r_1\,r_2}{2r_1+r_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Bogenlänge s beträgt

$$s=\int_0^\tau \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}\tau=\frac{4ab}{a-b}\sin\frac{a-b}{2}\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

das Quadrat der Sehne σ

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 &= x^2+(y-\overline{a+b})^2 \\ &= 2a(a+b)(1-\cos b\tau)+2b(a+b)(1-\cos a\tau)-2ab(1-\cos\overline{a-b}\,\tau) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Da der gesuchte Unterschied $s-\sigma$ gegenüber s sehr klein ist, können wir mit ausreichender Näherung

$$s-\sigma\approx\frac{s^2-\sigma^2}{2s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

setzen und erhalten so

$$s-\sigma=\frac{a+b}{s}\left[\frac{ab(a+b)}{(a-b)^2}(1-\cos\overline{a-b}\,\tau)-a(1-\cos b\tau)-b(1-\cos a\tau)\right] \qquad (6).$$

Entwickeln wir schließlich (6) in eine Potenzreihe nach τ und auf Grund von (3) τ in eine Potenzreihe von s, so erhalten wir das gesuchte Spiel als Reihe in s:

$$s-\sigma=\frac{(a+b)^2}{384\,a^2b^2}\cdot s^3\left(1+\frac{2a^2-5ab+2b^2}{120\,a^2b^2}\cdot s^2+\ldots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Das erste Glied dieser Entwicklung läßt sich einfacher auch so ableiten, daß man die Zykloide e durch ihren Scheitelkrümmungskreis ersetzt (Radius $\varrho_0=4ab/(a+b)$) und den Unterschied zwischen dem Kreisbogen s und der zugehörigen Sehne berechnet. —

Drücken wir endlich a und b nach (2) durch die Wälzkreisradien r_1, r_2 aus, so haben wir in erster Näherung:

$$s-\sigma=\frac{(2r_1+r_2)^4\cdot s^3}{384\,r_1^2\,r_2^2\,(r_1+r_2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Für den in Bild 1 zugrundeliegenden Fall $r_1=2$, $r_2=3$, $s=0{,}4$ liefert das ein Flankenspiel von $s-\sigma=0{,}00045$, das sind rund 0,11 % des Triebstockhalbmessers.

[2]) W. Hartmann: „Die Maschinengetriebe" Bd. I, Stuttgart 1913, S. 390.

Bild 3 zeigt eine nomographische Darstellung des Spiels auf Grund von Formel (8) in Gestalt einer Leitertafel von projektivem Typ. Sie ist in erster Linie für Übersetzungen $n = r_2/r_1 \geqq 1$ gedacht, da der Triebstockhalbmesser auf r_1 bezogen ist; für $n < 1$ empfiehlt sich der Bezug auf r_2. Man gewinnt jedenfalls einen guten Überblick über die Größenordnung des fehlerhaften Spiels.

Besondere Erwähnung verdienen noch die beiden Grenzfälle, in denen eines der Räder in eine Zahnstange übergegangen ist. Für $r_2 = \infty$ wird

$$s - \sigma = \frac{s^3}{384\, r_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8')$$

und die Leitertafel kann auch dafür verwendet werden ($n = \infty$). Für $r_1 = \infty$, das ist der in der Praxis häufige Fall, in dem die Zahnstange die Triebstöcke trägt, gilt

$$s - \sigma = \frac{s^3}{24\, r_2^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8'').$$

Diese Abhängigkeit ist durch die Doppelleiter in Bild 3 unten dargestellt.

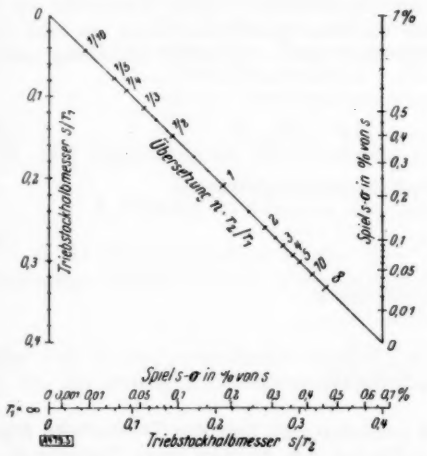


Bild 3.

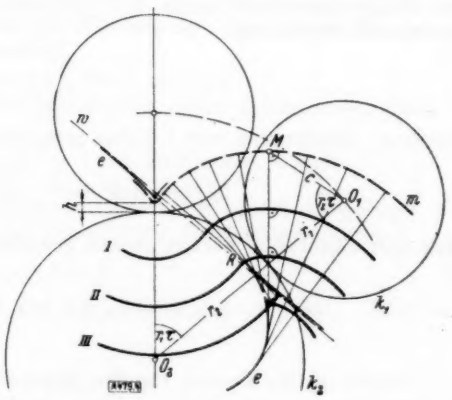


Bild 4.

§ 3. Behebung des Fehlers.

Wir werfen nun die Frage auf: ***Um welchen Betrag h müssen die Triebstöcke ins Innere des Teilkreises gerückt werden, um eine einwandfreie Verzahnung zu gewährleisten?***

Daß auf diese Weise eine Abstellung des in § 1 beschriebenen Mißstandes möglich ist, kann man sich leicht klar machen: Verschiebt man die Triebstöcke um ein beträchtliches Stück h gegen die Rollkreismitte O_1, so beschreiben ihre Mittelpunkte M bei der Rollung gestreckte Trochoiden, deren innere Parallelkurven im Abstand s keine Singularitäten aufweisen, wenigstens nicht an den kritischen Stellen. Hat man hingegen h zu klein genommen, so löst sich die Oskulation bei P in zwei weitere Rückkehrpunkte auf und das Profil p_2 weist in dieser Umgebung nun sogar 3 Spitzen auf. Der Grenzfall — und gerade dieser muß uns interessieren — besteht nun darin, daß zwei dieser Spitzen sich vereinigen, und zwar zu einem sogenannten Gipfel- oder Spitzpunkt.

Wir können uns die Verhältnisse noch in der Weise anschaulich machen, daß wir die verschiedenen Parallelkurven einer gestreckten Trochoide m betrachten (Bild 4). Deren Evolute e besitzt eine Asymptote w, dem Wendepunkt von m entsprechend, und einen Rückkehrpunkt R, hervorgerufen von einem „Zwischenscheitel" der Trochoide. Ist mithin der Abstand s klein, so begleitet die Parallelkurve I die Trochoide auf der Innenseite ohne Singularitäten; ist s jedoch groß, so erhält die Parallelkurve III 2 Spitzen (man verfolge die Abwicklung der Evolute); im Grenzfall II geht sie ohne äußere Auffälligkeiten durch R, besitzt hier aber als höhere Singularität einen Gipfelpunkt.

Diese Überlegung bietet auch schon die Handhabe zur rechnerischen Beantwortung der eingangs aufgeworfenen Frage. Wir setzen die Trochoide in Parameterdarstellung an:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \sin b\tau - c \sin a\tau \\ y &= a \cos b\tau - c \cos a\tau \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Hierin ist $a = r_1 + r_2$, $b = r_1$ und $c = r_1 - h$ der Zentralabstand $O_1 M$ des Triebstockes.

Wir suchen nun jene Punkte, deren Krümmungshalbmesser ϱ dem Betrage nach gleich dem Triebstockradius s ist; diese führen nämlich zu den Spitzen der Parallelkurve (vgl. III in Bild 4). Es ist

$$\varrho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}} = \frac{a\,[b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cdot \cos(a-b)\,\tau]^{\frac{3}{2}}}{b\,c\,(a+b)\cos(a-b)\,\tau - (a\,c^2 + b^3)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

und die Bedingung $\varrho = \pm s$ führt bei der Bestimmung des Parameters τ auf die kubische Gleichung

$$(t - b^2 - c^2)^3 + s^2\,[\lambda\,t - (2\,\lambda - 1)\,b^2 - c^2]^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

in der abkürzend

$$2\,b\,c \cdot \cos(a-b)\,\tau = t \qquad \text{und} \qquad \frac{a+b}{2\,a} = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

gesetzt ist.

Wir sehen, die Ermittlung der Spitzen für die Parallelkurve einer Trochoide ist im wesentlichen eine kubische Aufgabe. Sollen zwei Spitzen zusammenrücken, so muß (11) eine Doppelwurzel haben, d. h. es muß neben (11) auch noch die durch Ableitung nach t entstehende Gleichung

$$3\,(t - b^2 - c^2)^2 + 2\,\lambda\,s^2\,[\lambda\,t - (2\,\lambda - 1)\,b^2 - c^2] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

bestehen. Entfernung von t liefert uns dann die Diskriminantengleichung

$$27\,(1-\lambda)\,(b^2 - c^2) - 4\,\lambda^3\,s^2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Über (12) ergibt sich daraus unsere gesuchte Grenzbedingung:

$$b^2 - c^2 = 2\,r_1\,h - h^2 = s^2 \cdot \frac{(2\,r_1 + r_2)^3}{27\,r_2\,(r_1 + r_2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Damit ist die Formel für den Mindestbetrag h gefunden, um den die Triebstöcke gegen die Radmitte versetzt werden müssen, so daß das Auftreten von Spitzen beim Gegenprofil p_2 mit Sicherheit verhütet wird. Das Gegenprofil enthält nun keinerlei Kreisbogen mehr, sondern besteht zur Gänze aus einer Parallelkurve der Mitteltrochoide m.

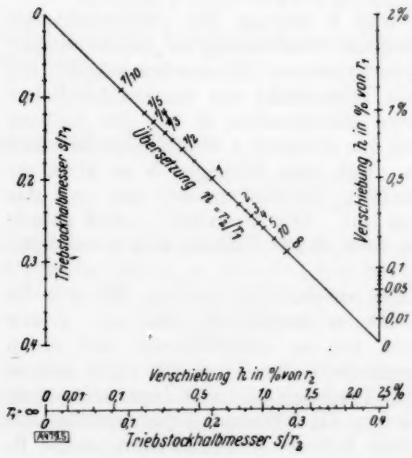


Bild 5.

Da h sehr klein ist, kann das Glied h^2 in Formel (15) vernachlässigt werden.

Für die in Bild 1 zugrundegelegte Annahme $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $s = 0{,}4$ ergibt sich $h = 0{,}0068$, d. i. 0,34 % vom Teilkreishalbmesser r_1.

Bild 5 gibt eine nomographische Darstellung der Funktion (15) in Form einer Leitertafel; Triebstockhalbmesser s und Verschiebung h sind dabei auf den Wälzkreisradius r_1 bezogen. — Erwähnt werden müssen wieder die beiden Grenzfälle $r_2 = \infty$ und $r_1 = \infty$. Ersterer wird noch durch die Leitertafel erfaßt ($n = \infty$), letzterer führt auf

$$h = \frac{4\,s^2}{27\,r_2} \quad \ldots\ldots \quad (15')$$

und wird durch die Doppelleiter in Bild 5 unten dargestellt.

Abschließend kann also festgestellt werden: ***Der Fehler der Triebstockverzahnung ist außerordentlich klein. Das durch ihn bedingte Flankenspiel liegt in der Größenordnung des praktisch stets vorhandenen Spiels. Durch geringfügige Verschiebung der Triebstöcke gegen die Radmitte läßt sich der Fehler vollständig ausschalten, ohne daß die Eingriffsverhältnisse merklich verschlechtert würden.***

Lösungen der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung mit periodischer Störfunktion beliebiger Frequenz (mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzlösungen).

Von *Gertrud Kotowski* in Berlin.

(Mitteilung aus dem Vierjahresplan-Institut für Schwingungsforschung, Berlin.)

Die vorliegende Arbeit ist der systematischen und vollständigen Untersuchung der bis jetzt nur in allgemeinen Zügen bekannten Lösung der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung mit und ohne Dämpfungsglied gewidmet. Es wird vor allem nach der Form der Lösungen (mit Einschluß der Resonanzlösungen) und nach der Lage der Kurven der Resonanzstellen gefragt. Da sich unendlich viele Kurven der Resonanzstellen ergeben, wird, bei gegebener Störfunktion und Dämpfungsfreiheit, eine numerische Untersuchung für gewisse Werte der Parameter vorgenommen, um aus der „Breite" der Resonanzbereiche eine Abschätzung für die Bedeutung der Resonanzstellen mit wachsender Ordnungszahl zu gewinnen. Ferner werden für einige Werte des Dämpfungskoeffizienten „Dämpfungskurven", die zugleich die Kurven der Resonanzstellen bei gewissen Störfrequenzen sind, berechnet.

A. Die inhomogene Mathieusche Differentialgleichung ohne Dämpfungsglied.

I. Lösung im Inneren der Gebiete $\left(\mu \neq \frac{n \cdot i}{2}\right)$ der Struttschen Karte.

a) Herleitung der Form der erzwungenen (partikularen) Lösung. Die inhomogene Mathieusche Differentialgleichung mit periodischer Störfunktion lautet

$$\ddot{y} + (\omega^2 + a^2 \cos \Omega t)\, y = f(p, t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wobei $f(p, t)$ eine periodische Funktion von t mit der Kreisfrequenz p sein soll. Setzt man wie bei der homogenen Differentialgleichung

$$\Omega t = x, \qquad t = \frac{x}{\Omega}, \qquad p\, t = \frac{p}{\Omega}\, x,$$

so erhält die Gl. (1) die Form (wenn Striche Ableitungen nach x bedeuten)

$$y'' + (\lambda + \gamma \cos x)\, y = f\left(\frac{p}{\Omega}, x\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

mit

$$\frac{\omega^2}{\Omega^2} = \lambda, \qquad \frac{a^2}{\Omega^2} = \gamma.$$

Die Mathieusche Differentialgleichung ist eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Es gilt der Satz, daß, wie auch immer die Koeffizientenfunktionen einer solchen Differentialgleichung aussehen, man das allgemeine Integral der inhomogenen Gleichung bei Kenntnis eines Fundamentalsystems der homogenen Differentialgleichung stets bestimmen kann. Die allgemeinste Methode zu dieser Bestimmung ist unter dem Namen der „Variation der Konstanten" bekannt. Sie erlaubt die Bestimmung der gesuchten Lösung mit Hilfe einer einfachen Quadratur.

Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem der zu (2) gehörigen homogenen Gleichung, dann bestimmt sich das allgemeine Integral $y_0(x)$ der inhomogenen Gl. (2) aus der Formel

$$y_0(x) = y_2(x) \int^x \frac{y_1(\xi) f\left(\frac{p}{\Omega}, \xi\right)}{\Delta} \mathrm{d}\xi - y_1(x) \int^x \frac{y_2(\xi) f\left(\frac{p}{\Omega}, \xi\right) \mathrm{d}\xi}{\Delta} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

mit

$$\Delta = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \text{const} \neq 0.$$

Hierbei sind die unteren Grenzen der Integrale beliebig; sie entsprechen den willkürlichen Integrationskonstanten in der Lösung der homogenen Differentialgleichung. Es interessiert aber nur der Anteil der Lösung, der von der oberen (variablen) Grenze herrührt. Er soll im folgenden stets als y_{part} bezeichnet werden.

Da wir es mit einer linearen Differentialgleichung zu tun haben, dürfen wir als Störfunktion in der zu behandelnden Differentialgleichung (2) eine einzige Harmonische

$$f\left(\frac{p}{\Omega}, x\right) = a\, e^{i\frac{p}{\Omega}x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

betrachten.

Die Fundamentalintegrale der zugehörigen homogenen Differentialgleichung besitzen (solange man sich nicht auf einer Grenzkurve der Struttschen Karte [1, S. 216][1]), Bild 1, befindet) die Formen

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\mu x}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu\, e^{i\nu x} \\ \text{und} \\ y_2(x) &= e^{-\mu x}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu\, e^{i\nu x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

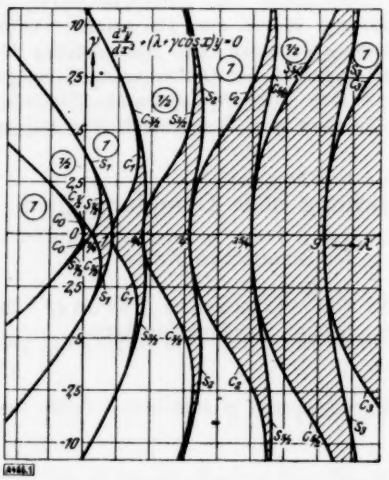


Bild 1 (links). Stabile und labile Lösungsgebiete der Mathieuschen Differentialgleichung. Struttsche Karte.

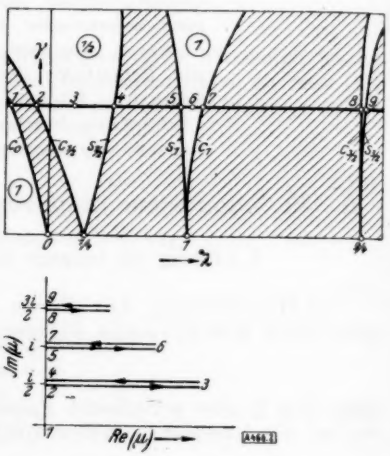


Bild 2 (rechts). Verhalten des charakteristischen Exponenten $\mu = \mu(\lambda, \gamma)$ auf einer Parallelen zur λ-Achse.

(Hierin ist $\mu = \mu(\lambda, \gamma)$, der charakteristische Exponent [1, S. 216], für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung eindeutig so festgelegt, wie es Bild 2 zeigt.) Führt man die Ausdrücke (4) für die Störfunktion und (5) für die Fundamentalintegrale in die Formel (3) ein und vertauscht hierin Summen- und Integralzeichen, was bei der Art der Reihenentwicklungen der Lösungen der homogenen Differentialgleichung erlaubt ist, so ergibt sich die Lösung y_{part} in der Form

$$\left.\begin{aligned} y_{part} = \frac{a}{\Delta}\Bigg[& e^{-\mu x}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu\, e^{i\nu x}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{}^{x} a_\nu\, e^{\left(i\nu + i\frac{p}{\Omega}+\mu\right)\xi}\,\mathrm{d}\,\xi \\ & - e^{\mu x}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu\, e^{i\nu x}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{}^{x} b_\nu\, e^{\left(i\nu + i\frac{p}{\Omega}-\mu\right)\xi}\,\mathrm{d}\,\xi\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Nach Ausführung der Integration erhalten wir daraus, wenn für alle ν der Ausdruck

$$\left(i\nu \pm \mu + i\frac{p}{\Omega}\right) \neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

ist,

$$\left.\begin{aligned} y_{part} = \frac{a}{\Delta}\Bigg[& e^{-\mu x}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu e^{i\nu x}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_\nu}{\left(i\nu + i\frac{p}{\Omega}+\mu\right)}\, e^{\left(i\nu + i\frac{p}{\Omega}+\mu\right)x} \\ & - e^{\mu x}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu\, e^{i\nu x}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_\nu}{\left(i\nu + i\frac{p}{\Omega}-\mu\right)}\, e^{\left(i\nu + i\frac{p}{\Omega}-\mu\right)x}\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

[1]) Die eckigen Klammern im Text weisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit hin.

Multiplizieren wir aus, so ergibt sich y_{part} in der Form

$$y_{part} = a\, e^{i\frac{p}{\Omega}x} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

da $e^{\mu x} \cdot e^{-\mu x} = 1$ und das Produkt zweier periodischer Funktionen derselben Frequenz im allgemeinen Falle wieder eine periodische Funktion dieser Frequenz ist.

Das Ergebnis läßt sich also in der folgenden Weise aussprechen: Ist $\left(i\nu + i\frac{p}{\Omega} \pm \mu\right) \neq 0$, so erhalten wir im allgemeinen Falle als Form des partikularen Integrals der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung im Innern der Gebiete der Struttschen Karte (wie bei der Lösung der homogenen Gleichung) eine periodische Funktion zweiter Art; hier ist jedoch auch der erste Faktor stets periodisch und daher stets beschränkt; er hat die Frequenz der Störfunktion, während der zweite Faktor wieder die Frequenz der Belegungsfunktion aufweist.

Die Form des partikularen Integrals (9) legt es nahe, zwei wesentliche Fälle der Größe $\frac{p}{\Omega}$ (Störfrequenz) zu unterscheiden:

und
$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \frac{p}{\Omega} \neq \frac{n}{2} \\ 2. & \frac{p}{\Omega} = \frac{n}{2} \end{array}\right\} \quad (n = \text{ganze Zahl einschließlich der Null}).$$

Der Fall 2 wird im folgenden stets nochmals unterteilt in

$$\frac{p}{\Omega} = n \quad \text{und} \quad \frac{p}{\Omega} = \frac{2n+1}{2}$$

Wir unterscheiden also bei der weiteren Untersuchung stets die drei Arten von Störfrequenzen: Die Störfunktion hat

α) irgendeine, von n und $\frac{2n+1}{2}$ verschiedene „Kreisfrequenz",

β) die „Kreisfrequenz" n,

γ) die „Kreisfrequenz" $\frac{2n+1}{2}$

(n = ganze Zahl einschließlich der Null).

Wir wollen zunächst die Form der Lösungen im Innern der Gebiete in den drei Fällen α), β) und γ) gesondert angeben unter der Voraussetzung, daß die Bedingung (7) erfüllt ist.

Im Fall α), also wenn die Kreisfrequenz der Störfunktion irgendeine beliebige reelle von n und $\frac{2n+1}{2}$ verschiedene Zahl ist, ist das partikulare Integral eine beschränkte periodische Funktion zweiter Art, deren erster Faktor die Frequenz der Störfunktion und deren zweiter Faktor die Frequenz der Belegungsfunktion hat (ist das Verhältnis von $\frac{p}{\Omega}$ zu n rational, so ist die Gesamtfunktion bekanntlich wieder periodisch). In dem zweiten periodischen Faktor werden im allgemeinen sämtliche Harmonische auftreten, auch wenn die Störfunktion nur eine einzige Harmonische enthält.

Im Fall β), wenn also die Frequenz der Störfunktion gleich der der Belegungsfunktion oder gleich einem ganzzahligen Vielfachen davon ist, ergibt sich mit $\frac{p}{\Omega} = n$ für das partikulare Integral (9) die Form

$$y_{part} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c'_\nu e^{i\nu x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Die partikulare Lösung ist also eine beschränkte, periodische Funktion mit der Frequenz der Belegungsfunktion. Selbst wenn die Störfunktion nur eine einzige Harmonische enthält (es ist auch $n = 0$, also der Fall einer konstanten Störfunktion, eingeschlossen), enthält die erzwungene Lösung im allgemeinen Fall sämtliche Harmonische mit Einschluß der Konstanten.

Entsprechende Resultate ergeben sich im Fall γ). Setzt man in der Form (9) des partikularen Integrals die „Kreisfrequenz" $\frac{p}{\Omega} = \frac{2n+1}{2}$, ist also die Frequenz der Störfunktion gleich der halben Frequenz der Belegungsfunktion oder gleich einem ungeraden ganzzahligen

Vielfachen der halben Frequenz, so erhält man als Lösung eine beschränkte, periodische Funktion mit der halben Frequenz der Belegungsfunktion. (Ganzzahlige Harmonische können in der Lösung nicht auftreten, sie enthält also sicher keine Konstante.)

b) Die partikulare Lösung in den Fällen β) und γ) ist gerade oder ungerade, je nachdem die Störfunktion gerade oder ungerade ist. Wir wollen in diesem Abschnitt das bereits in der Überschrift angegebene Resultat kurz ableiten, und zwar nur für die Fälle β) und γ), für die die Lösung y_{part} eine rein periodische Funktion ist. Im Falle α), wo y_{part} im allgemeinen die Form einer beschränkten periodischen Funktion zweiter Art hat, ist die Unterscheidung in gerade und ungerade Funktionen zweiter Art (auch im Hinblick auf die später erfolgenden Untersuchungen) ohne wesentliches Interesse.

Im Fall β) $\left(\frac{p}{\Omega}=n\right)$ erhielten wir die partikulare Lösung in der Form (10). Schreibt man statt der e-Funktionen die gleichwertigen Kreisfunktionen an, so ergibt sie sich in der Gestalt

$$y_{part}=\sum_{0}^{\infty}{}' A_\nu \cos \nu x+\sum_{1}^{\infty}{}' B_\nu \sin \nu x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Führt man diesen Ansatz in die inhomogene Mathieusche Differentialgleichung

$$y''+(\lambda+\gamma\cos x)\,y=\sum_{0}^{\infty}{}' a_\varrho \cos \varrho x+\sum_{1}^{\infty}{}' b_\varrho \sin \varrho x$$

ein, so erhält man nach Durchführung des Koeffizientenvergleiches ein unendliches, inhomogenes System algebraischer Gleichungen, das in zwei zerfällt, eines zur Bestimmung der A_ν und ein zweites zur Bestimmung der B_ν. Die linken Seiten dieser Systeme stimmen mit denen zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten der Mathieuschen Funktionen erster Art, mit dem Index n überein [2, S. 30]. Also entsprechen auch die Systemdeterminanten Δ_{Cn} und Δ_{Sn} dieser homogenen Systeme den Nennerdeterminanten der inhomogenen Systeme zur Bestimmung der A_ν und B_ν. Ist nun die Störfunktion gerade, sind also alle b_ϱ gleich Null, so wird das System zur Bestimmung der Koeffizienten B_ν homogen, die Determinante muß also zu Null werden, wenn eine nicht-triviale Lösung existieren soll. Da diese Determinante aber gleich der Determinante des Systems zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten der Mathieuschen Funktionen erster Art, Δ_{Sn}, ist, von der wir wissen, daß sie nur für die Parameter der S_n-Kurven zu Null wird [2, S. 41], so werden also sämtliche B_ν zu Null; bei gerader Störfunktion ist also die partikulare Lösung im Innern der Gebiete gleichfalls eine gerade Funktion. Der gleiche Gedankengang läßt sich für eine ungerade Störfunktion durchführen. Die partikulare Lösung ist also bei ungerader Störfunktion überall im Innern der Gebiete gleichfalls eine ungerade Funktion.

Entsprechende Resultate gelten im Fall γ).

c) Resonanzbedingung und Kurven der Resonanzstellen. Nur im Fall α) liegen die Kurven der Resonanzstellen im Innern der (stabilen) Gebiete.

Die in den Abschnitten a und b abgeleiteten Formen der Integrale bleiben gültig, solange die Bedingung (7) nicht verletzt ist. Es ist nun als nächstes die Frage zu beantworten, ob und für welche Parameterwerte λ und γ die Bedingung (7) nicht mehr gilt, wann also

$$\left(i\nu+i\,\frac{p}{\Omega}\pm\mu\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

ist. Wir wollen die Bedingung (12) im folgenden stets als „Resonanzbedingung" bezeichnen. Für $\gamma=0$ geht sie in die bekannte Bedingung für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ohne Dämpfungsglied, $\omega=p$, über, da $\mu(\lambda,0)=i\sqrt{\lambda}=i\,\frac{\omega}{\Omega}$ ist. Wie Formel (8) zeigt, wird die partikulare Lösung für jene Werte von $\mu(\lambda,\gamma)$ (und ν), die der Bedingung (12) genügen, unbeschränkt, da dann einige der Nenner zu Null werden. Alle jene zusammengehörigen Parameterwerte λ und γ, die zu einem Wert $\mu(\lambda,\gamma)=\text{constans}$ gehören, für den die Bedingung (12) erfüllt ist, wollen wir als „Kurven der Resonanzstellen" bezeichnen. (Bei einem festen Wert von ν erhalten wir eine Kurve der Resonanzstellen für einen bestimmten Wert $p/\Omega=\text{constans}$; da ν eine ganze Zahl ist, die sämtliche Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann, erhalten wir für einen festen Wert $p/\Omega=\text{constans}$, also unendlich viele Kurven der Resonanzstellen.) Für die Wertepaare λ und γ der Kurven der Resonanzstellen wird die partikulare Lösung also unbeschränkt. Aus der Bedingung (12) bestimmen wir nunmehr die Lage der Kurven der Resonanzstellen in den Fällen α), β) und γ).

Wir wenden uns zunächst dem Fall α) zu. Da ν eine ganze Zahl ist, $\frac{p}{\Omega}$ aber weder ganz- noch halbzahlig sein sollte, so kann Gl. (12) nur dann erfüllt sein, wenn auch μ weder

ganz- noch halbzahlig, aber rein imaginär ist. Das kann aber nur für solche Wertepaare λ und γ der Fall sein, die innerhalb der stabilen Gebiete der Struttschen Karte [1, S. 216] liegen und für die

$$\mu(\lambda,\gamma) = \mp\left(i\nu + i\frac{p}{\Omega}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ist. Auf den Kurven solcher zusammengehöriger Werte λ und γ innerhalb der stabilen Gebiete der Struttschen Karte, die durch längs der Kurven konstante, der Gl. (13) genügende Parameterwerte μ charakterisiert werden, wird die partikulare Lösung also unbeschränkt; Gl. (13) stellt damit die Definitionsgleichung der Kurven der Resonanzstellen im Falle α) dar. Wie man aus Gl. (13) weiter ablesen kann (und wie wir oben schon erwähnt haben), gibt es selbst bei einem fest gegebenen Verhältnis von $\frac{p}{\Omega}$ unendlich viele Kurven der Resonanzstellen, da ν eine ganze Zahl bedeutet, die jeden Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt. In Bild 3 sind schematisch die ersten Kurven der Resonanzstellen für das Beispiel $\frac{p}{\Omega} = \pm\frac{1}{3}$ eingezeichnet.

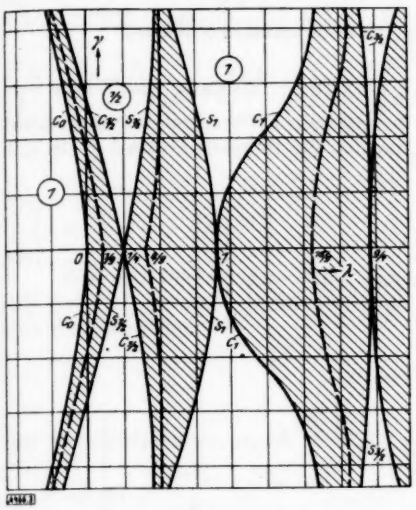


Bild 3. Kurven der Resonanzstellen im Fall α) $\left(\frac{p}{\Omega} \neq \frac{n}{2}\right)$ für $\vartheta = 0$. Beispiel $\left(\frac{p}{\Omega} = \pm\frac{1}{3}\right)$ (schematisch).

Im Fall β) nimmt die Bedingung (12) mit $\frac{p}{\Omega} = n$ die Form

$$(i\nu + in \pm \mu(\lambda,\gamma)) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

an. Da ν und n ganze Zahlen sind, so ist Gl. (14) nur dann erfüllt, wenn auch μ eine imaginäre ganze Zahl ist. Dies ist aber nur auf den ganzzahligen Grenzkurven der Struttschen Karte der Fall. Sie stellen also die Kurven der Resonanzstellen des Falles β) dar, und zwar sind, auch bei festem $\frac{p}{\Omega} = n$, sämtliche ganzzahligen Grenzkurven Kurven der Resonanzstellen, da ν ja alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

Im Fall γ) erhält man mit $\frac{p}{\Omega} = \frac{2n+1}{2}$ aus Gl. (12) nach denselben Überlegungen das Ergebnis, daß für jedes n alle halbzahligen Grenzkurven Kurven der Resonanzstellen sind. In den Fällen β) und γ) ist die Lösung im Innern der Gebiete also stets beschränkt.

d) Herleitung der Resonanzlösung für den Fall α). Da die Kurven der Resonanzstellen in die stabilen Gebiete fallen, also μ sicher verschieden von $\frac{n \cdot i}{2}$ ist, gilt das Fundamentalsystem

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{\mu x}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x}, \\ y_2 &= e^{-\mu x}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu e^{i\nu x} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

auch für die Wertepaare λ und γ, die der Resonanzbedingung (13) genügen.

Damit bleiben auch alle Formeln, die wir unter (a) zur Herleitung des partikularen Integrals benutzten, gültig, solange wir noch nicht integriert haben. Formel (8) dagegen, also nach Ausführung der Integrale, bleibt nur für jene Werte von μ (und ν) richtig, für die die Bedingung (7) erfüllt ist. Diese Glieder geben nach dem Ausintegrieren wieder eine beschränkte, periodische Funktion zweiter Art, also ein Integral der Form (9), während die Glieder, für die $\nu = -\frac{p}{\Omega} \mp \frac{\mu}{i}$ ist, nach dem Ausintegrieren liefern:

$$-x\,e^{i\frac{p}{\Omega}x}\,b_{\left(\frac{\mu}{i}-\frac{p}{\Omega}\right)}\sum_{-\infty}^{+\infty} a'_\nu e^{i\nu x} \qquad \text{bzw.} \qquad x\,e^{i\frac{p}{\Omega}x}\,a_{-\left(\frac{\mu}{i}+\frac{p}{\Omega}\right)}\sum_{-\infty}^{+\infty} b'_\nu e^{i\nu x}.$$

Das gesamte partikulare Integral ist also von der Form:

$$y_{part} = e^{i\frac{p}{\Omega}x}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x} + x\sum_{-\infty}^{+\infty} d_\nu e^{i\nu x}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Die Resonanzlösungen im Falle a) gehen also mit x^1 gegen Unendlich.

II. Lösungen auf den Grenzkurven $\left(\mu = \frac{n \cdot i}{2}\right)$ der Struttschen Karte.

a) Herleitung der Form der erzwungenen Lösung. Wenn μ die Werte $\frac{n \cdot i}{2}$ annimmt, so ist das zugehörige Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung nicht mehr von der Form (15). Wenn $\mu = n \cdot i$ ist, hat es bekanntlich die folgende Gestalt [1, S. 216]

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= g_1(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x} \\ y_2(x) &= a\,x\,g_1(x) + g_2(x) = a\,x\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x} + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu e^{i\nu x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17),$$

wenn $\mu = \frac{2n+1}{2} i$ ist, lautet es:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= h_1(x) = e^{\frac{2n+1}{2} i x}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\frac{2\nu+1}{2}} e^{i\frac{2\nu+1}{2}x}, \\ y_2(x) &= \beta\,x\,h_1(x) + h_2(x) = \beta\,x\,e^{\frac{2n+1}{2} i x}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x} + e^{\frac{2n+1}{2} i x}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu e^{i\nu x} \\ &= \beta\,x\sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\frac{2\nu+1}{2}} e^{i\frac{2\nu+1}{2}x} + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_{\frac{2\nu+1}{2}} e^{i\frac{2\nu+1}{2}x} \end{aligned}\right\} \quad (18).$$

Wir schreiben in (18) uns das Integral auch in der Zwischenform an, wie es vor dem Hereinmultiplizieren mit $e^{\pm\mu x} = e^{\pm\frac{2n+1}{2} i x}$ aussehen würde, weil diese uns in den folgenden Herleitungen nützlich sein wird. Das partikulare Integral y_{part} berechnen wir wieder mit Hilfe der Gl. (3) (Variation der Konstanten).

Wir führen für $y_1(x)$ und $y_2(x)$ die Fundamentalintegrale (17) (im Falle $\mu = n\,i$) bzw. die Fundamentalintegrale (18) $\left(\text{im Falle } \mu = \frac{2n+1}{2} i\right)$ in die Gl. (3) ein, vertauschen Summen- und Integralzeichen miteinander und integrieren aus; dann ergibt sich im Falle α), da hier sicher keiner der Exponenten der e-Funktionen unter dem Integralzeichen verschwinden kann $\left(\nu, n = \text{ganze Zahlen}, \frac{p}{\Omega} \neq \frac{n}{2}\right)$, für $\mu = n \cdot i$:

$$\left.\begin{aligned} y_{part} = \frac{a}{\Delta}\Bigg[&\left(a\,x\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x} + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu e^{i\nu x}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_\nu}{i\left(\nu+\frac{p}{\Omega}\right)} e^{i\left(\nu+\frac{p}{\Omega}\right)x} \\ &- \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x}\Bigg\{\sum_{-\infty}^{+\infty}\Bigg(a_\nu \frac{a\,x}{i\left(\nu+\frac{p}{\Omega}\right)} e^{i\left(\nu+\frac{p}{\Omega}\right)x} \\ &+ \frac{a_\nu\,a}{\left(\nu+\frac{p}{\Omega}\right)^2} e^{i\left(\nu+\frac{p}{\Omega}\right)x}\Bigg) + \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_\nu}{i\left(\nu+\frac{p}{\Omega}\right)} e^{i\left(\nu+\frac{p}{\Omega}\right)x}\Bigg\}\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19),$$

bzw. für $\mu = \frac{2n+1}{2} i$:

$$y_{part} = \frac{a}{A}\left[\left(\beta x e^{\frac{2n+1}{2} i x} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x} + e^{\frac{2n+1}{2} i x} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu e^{i\nu x}\right)\right.$$
$$\sum_{-\infty}^{-\infty} \frac{a_\nu}{i\left(\nu + \frac{2n+1}{2} + \frac{p}{\Omega}\right)} e^{i\left(\nu + \frac{2n+1}{2} + \frac{p}{\Omega}\right)x}$$
$$- \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x} e^{\frac{2n+1}{2} i x} \left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(a_\nu \frac{\beta x}{i\left(\nu + \frac{2n+1}{2} + \frac{p}{\Omega}\right)} e^{i\left(\nu + \frac{2n+1}{2} + \frac{p}{\Omega}\right)x}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{a_\nu \beta}{\left(\nu + \frac{2n+1}{2} + \frac{p}{\Omega}\right)^2} e^{i\left(\nu + \frac{p}{\Omega} + \frac{2n+1}{2}\right)x}\right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_\nu}{i\left(\nu + \frac{2n+1}{2} + \frac{p}{\Omega}\right)} e^{i\left(\nu + \frac{2n+1}{2} + \frac{p}{\Omega}\right)x}\right\}\right] \quad (20).$$

Wie man leicht sehen kann, heben sich die mit x multiplizierten Glieder in den Formeln (19) und (20) heraus. Damit erhalten wir für die gesuchte Lösung bei den Werten $\mu = i n$ eine Funktion der Art

$$y_{part} = a e^{i\frac{p}{\Omega}x} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x} \quad \ldots \quad (21).$$

Das gleiche Resultat ergibt sich für die Werte $\mu = \frac{2n+1}{2} i$, wenn wir noch beachten, daß das Produkt $e^{\frac{2n+1}{2} i x} \cdot e^{\frac{2n+1}{2} i x} = e^{i(2n+1)x}$ ist.

Im Fall α), also für $\frac{p}{\Omega} \neq \frac{n}{2}$, ist daher auch für jene Wertepaare λ und γ, die zu den Grenzkurven der Struttschen Karte gehören, die partikulare Lösung y_{part} beschränkt und von der Form (9), ein Resultat, das sich damit deckt, daß für die Grenzkurven die Resonanzbedingung (13) nicht erfüllt ist.

Im Fall β), also für $\frac{p}{\Omega} = n$, erhalten wir in gleicher Weise das Ergebnis, daß die Form (10) des partikularen Integrals auf den halbzahligen Grenzkurven erhalten bleibt. Anders dagegen verhält sich hier die Lösung auf den ganzzahligen Grenzkurven, für die ja die Resonanzbedingung (14) erfüllt ist. Die in Formel (19) erhaltenen Integrale werden für den Wert $\nu = -n$ ungültig, während sie für alle anderen Werte von ν weiterhin gelten. Wir schreiben uns den Anteil des partikularen Integrals für $\nu = -n$ heraus und integrieren ihn gesondert. Das ergibt

$$y_{part_{\nu=-n}} = \frac{a}{A}\left[\left(a x \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x} + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu e^{i\nu x}\right) a_{-n} \int_0^x d\xi\right.$$
$$\left. - \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x}\left(a_{-n} \int_0^x a\xi\, d\xi + b_{-n} \int_0^x d\xi\right)\right] \quad \ldots \quad (22).$$

Ausintegriert, ausmultipliziert und entsprechend zusammengefaßt, erhalten wir daraus

$$y_{part_{\nu=-n}} = \frac{a}{A}\left[a \frac{x^2}{2} a_{-n} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x} + x\left(a_{-n} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu e^{i\nu x} - b_{-n} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x}\right)\right] \quad \ldots \quad (23).$$

Die Gesamtlösung ist also von der Form

$$y_{part} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x} + x \sum_{-\infty}^{+\infty} d_\nu e^{i\nu x} + x^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} e_\nu e^{i\nu x} \quad \ldots \quad (24),$$

sie stellt die „Resonanzlösung" des Falles β) dar.

Entsprechend erhalten wir im Fall γ) das Resultat, daß auf den ganzzahligen Grenzkurven der Struttschen Karte die Lösung y_{part} von derselben Form wie in den Gebieten ist, während die Lösungen auf den halbzahligen Grenzkurven $\left(\mu = \frac{2n+1}{2} i\right)$ vom Typ

$$y_{part} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{\frac{2\nu+1}{2}} e^{i\frac{2\nu+1}{2}x} + x \sum_{-\infty}^{+\infty} d_{\frac{2\nu+1}{2}} e^{i\frac{2\nu+1}{2}x} + x^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} e_{\frac{2\nu+1}{2}} e^{i\frac{2\nu+1}{2}x} \quad . \quad (25)$$

sind; sie sind die „Resonanzlösungen" des Falles γ).

Im Fall β) und γ) gehen also die „Resonanzlösungen" mit x^2 gegen Unendlich, während sie im Fall α) nur mit x^1 gegen Unendlich gehen.

Wir fassen die bisher erhaltenen Resultate kurz in dem folgenden Satz zusammen: Das partikulare Integral der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung ohne Dämpfungsglied mit periodischer Störfunktion wird nur in den Fällen, in denen die Resonanzbedingung $\left(i\nu + \frac{ip}{\Omega} \pm \mu(\lambda, \gamma)\right) = 0$ erfüllt ist, unbeschränkt. Für alle anderen Wertepaare λ und γ, ganz gleich, ob sie in die Gebiete oder auf die Grenzkurven fallen, bleibt die Lösung beschränkt. Diese Aussage gilt für alle möglichen Werte der Frequenz der Störfunktion (Fall α), β) und γ)).

b) Trennung der Kurven der Resonanzstellen in den Fällen β) und γ), je nachdem, ob die Störfunktion gerade oder ungerade ist. Wir wollen hier noch kurz auf eine Einschränkung zu den Ergebnissen des Abschnitts Ic in den Fällen β) und γ) aufmerksam machen, die dann auftritt, wenn die Störfunktion entweder nur gerade oder nur ungerade ist. Wir betrachten als Beispiel die partikulare Lösung auf den C_n-Kurven im Fall β). Die Störfunktion habe eine der beiden Formen

$$f(n, x) = \text{1. } a_n \cos n x \quad \text{und} \quad \text{2. } \beta_n \sin n x \quad . \quad (26).$$

Das Fundamentalsystem, das auf den C_n-Kurven gilt, kann statt nach (17) auch in der Form

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_0^\infty a_\nu \cos \nu x, \\ y_2(x) &= a x \sum_0^\infty a_\nu \cos \nu x + \sum_1^\infty b_\nu \sin \nu x \end{aligned}\right\} \quad . \quad (27)$$

angeschrieben werden. Führen wir dieses Fundamentalsystem und die Störfunktion $a_n \cos n x$ in die Gl. (3) ein, so ergibt sich nach Durchführung der Integration als Form der Lösungen

$$y_{part} = \sum_0^\infty c_\nu \cos \nu x + x \sum_1^\infty d_\nu \sin \nu x + x^2 \sum_0^\infty e_\nu \cos \nu x \quad . \quad (28).$$

Setzen wir dagegen wieder das Fundamentalsystem (27), aber die Störfunktion $\beta_n \sin n x$ in Gl. (3) ein, so erhalten wir zunächst als Ergebnis der Integration auch einen mit x gehenden Anteil. Zieht man aber von dem so erhaltenen Ausdruck für y_{part} die mit einem bestimmten konstanten Faktor multiplizierte Fundamentallösung $y_2(x)$ aus (27) ab, was stets erlaubt ist, so entfällt der mit x gehende Anteil. Wir erhalten also ein partikulares Integral, das beschränkt ist und die Form

$$y_{part} = \sum_1^\infty c_\nu \sin \nu x \quad . \quad (29)$$

hat. Entsprechendes erhält man auf den ungeraden ganzfrequenten Grenzkurven bei einer ganzfrequenten geraden Störfunktion.

Dieselben Resultate gelten im Falle γ).

Es zeigt sich also, daß in den Fällen β) und γ) für eine gerade Störfunktion nur die „geraden" Grenzkurven, C_n und $C_{\frac{2n+1}{2}}$, Kurven der Resonanzstellen sind und für eine ungerade Störfunktion nur die „ungeraden" Grenzkurven, S_n und $S_{\frac{2n+1}{2}}$, ein Resultat, das auch mit dem Verhalten der Nennerdeterminanten des Abschnittes Ib in Einklang steht.

c) Numerische Untersuchung der drei ersten Resonanzbereiche bezüglich ihrer „Resonanzbreite" für eine Störfunktion von der Form $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$. Es handelt sich im folgenden um Untersuchungen, die zum Fall β) gehören, und zwar bei einer geraden Störfunktion.

Da die erzwungene Lösung y_{part} bei einer Störfunktion, die aus nur einer Harmonischen besteht, schon unendlich viele Resonanzstellen aufweist, erhebt sich die Frage nach der relativen Wichtigkeit der einzelnen Resonanzbereiche. Als Maß für diese Wichtigkeit wollen wir die „Breite" der Resonanzbereiche einführen und dabei als „Resonanzbreite" den Frequenzbereich definieren, in dem die von den Störgliedern mit der Amplitude 1 hervorgerufenen

Zahlentafel 1. $\gamma = 1$.

λ	$\frac{A_0^{(5)}}{a_0}$	λ	$\frac{A_1^{(5)}}{a_0}$	λ	$\frac{A_2^{(5)}}{a_0}$
— 1,229	— 0,9993	— 0,839	— 1,0007	— 0,8	— 0,1166
— 0,8	— 1,8494	— 0,6	— 2,3408	— 0,6	— 0,2559
— 0,6	— 3,6173	— 0,5	— 4,5033	— 0,45	— 0,8896
— 0,5	— 6,5033	— 0,45	— 7,8698	— 0,42	— 1,5697
— 0,45	— 10,9665	— 0,4	— 26,9292	— 0,4	— 3,0788
— 0,4	— 36,1616	— 0,379	∞	— 0,379	∞
— 0,379	∞	— 0,35	20,9470	— 0,35	2,4226
— 0,35	27,0671	— 0,3	7,8400	— 0,31	1,0424
— 0,3	9,7333	— 0,2	3,6767	— 0,3	0,9174
— 0,2	4,1918	— 0,1	2,5244	— 0,2	0,4406
0	1,8741	0	2,0000	0	0,2518
0,225	1,0073	0,1	1,7137	0,5	0,2018
0,5	0,5994	0,2	1,5462	0,8	0,2643
0,8	0,2029	0,3	1,4502	1,0	0,4051
0,9181	0	0,4	1,4045	1,1	0,5927
1,0	— 0,2025	0,5	1,4006	1,18	0,9866
1,1	— 0,6363	0,6	1,4378	1,2	1,1915
1,145	— 1,0042	0,7	1,5233	1,25	2,5372
1,2	— 1,9149	0,8	1,6753	1,293	∞
1,25	— 4,7160	1,0	2,4047	1,35	— 1,8831
1,27	— 9,2040	1,1	3,3999	1,4	— 0,9920
1,293	∞	1,2	6,5957	1,5	— 0,5042
1,32	8,8080	1,25	13,7908	2,0	— 0,1451
1,35	4,3914	1,293	∞		
1,5	1,4958	1,35	— 9,8570		
1,655	1,0002	1,5	— 2,4874		
2,0	0,6425	1,75	— 0,9901		
		2,0	— 0,5699		

erzwungenen Amplituden größer sind als ± 1. Allerdings müssen wir dabei bedenken, daß von den Resonanzbereichen nur der Teil von praktischem Interesse ist, der in die stabilen Gebiete der homogenen Lösung fällt. Im folgenden wird als Beispiel die Differentialgleichung mit der Störfunktion $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$ und dem Wert $\gamma = 1$ untersucht. Die Größe λ durchläuft dabei den Wertebereich -1 bis $+2{,}0$. Das unendliche inhomogene System algebraischer Gleichungen, das man zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten A_ν erhält, wenn man mit dem Ansatz $y_{part} = \sum_0^\infty A_\nu \cos \nu x$ (A I b) in die inhomogene Mathieusche Differentialgleichung mit der Störfunktion $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$ eingeht und einen Koeffizientenvergleich durchführt, konnte, wie sich bei Durchführung der Rechnung zeigte, wegen der guten Konvergenz bereits nach den ersten vier bzw. fünf Gleichungen abgebrochen werden. Es betrug nämlich bei den von uns gewählten Werten von λ die Abweichung zwischen den Werten, die aus vier Gleichungen, und denen, die aus fünf Gleichungen berechnet wurden, nie mehr als $^1/_2$ %. Ferner zeigte sich, daß bereits der Fourierkoeffizient A_3 der partikularen Lösung im Verhältnis zum Fourierkoeffizienten A_2 vernachlässigt werden kann (A_3 beträgt höchstens noch 10 % von A_2). Es wurden deshalb nur die Koeffizienten A_0, A_1 und A_2 bestimmt. Um die Tabulierung (und Aufzeichnung) möglichst allgemein zu halten, wurden in den Zahlentafeln 1 bis 3 nicht die Fourierkoeffizienten selbst angegeben, sondern gewisse Quotienten $\frac{A_\nu}{a_\mu}$, die den Charakter von „Vergrößerungsfunktionen" haben. Sie werden im folgenden auch stets als solche bezeichnet werden. Diese Bezeichnung wurde in Analogie zum Sprachgebrauch bei der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten gewählt. Die Größe $\frac{A_\nu}{a_\mu}$ bedeutet die Amplitude der ν-ten Harmonischen in der partikularen Lösung, die durch die μ-te Harmonische in der Störfunktion hervorgerufen wird, geteilt durch die Amplitude eben dieser μ-ten Harmonischen. Da die Amplituden der partikularen Lösung y_{part} nur linear von den Störamplituden abhängen, sind die Funktionen $\frac{A_\nu}{a_\mu}$ reine Funktionen von λ und γ.

Zahlentafel 2. $\gamma = 1$.

λ	$\frac{A_0^{(5)}}{a_1}$	λ	$\frac{A_1^{(5)}}{a_1}$	λ	$\frac{A_2^{(5)}}{a_1}$
— 0.633	— 1,0588	— 0,734	— 1,0003	— 0,5	— 0,2517
— 0,6	— 1,1704	— 0,7	— 1,0727	— 0,45	— 0,4003
— 0,5	— 2,2517	— 0,6	— 1,4045	— 0,405	— 1,0076
— 0,45	— 3,9349	— 0,5	— 2,2517	— 0,4	— 1.2315
— 0,4	— 13,4646	— 0,45	— 3,5414	— 0,39	— 2,2623
— 0,379	∞	— 0,4	— 10,7717	— 0,379	∞
— 0,35	10,4735	— 0,379	∞	— 0,370	2,9585
— 0,3	3,9200	— 0,35	7,3315	— 0,355	1,0388
— 0,2	1,8384	— 0.3	2,3520	— 0,35	0,8479
0	1,0000	— 0,23	0,9966	— 0,3	0,2752
0,5	0,7003	— 0,2	0,7353	— 0,2	0,0881
0,8	0,8377	— 0,1	0,2544	0	0
0,92	1,0037	0	0	0,5	— 0,1009
1,0	1,2024	0,1	— 0,1714	0,8	— 0,2114
1,1	1,7000	0,2	— 0,3092	1,0	— 0,4051
1,2	3,2979	0,3	— 0,4351	1,1	— 0,6519
1,25	6,8954	0,4	— 0,5618	1,18	— 1,1641
1,293	∞	0,5	— 0,7003	1,2	— 1,4298
1,32	— 10,6266	0,6	— 0,8627	1,25	— 3,1715
1,35	— 4,9285	0,7	— 1,0663	1,293	∞
1,5	— 1,2437	0,8	— 1,3403	1,35	2,5421
1,55	— 0,9682	1,0	— 2,4047	1,40	1,3888
1,75	— 0,4951	1,1	— 3,7399	1,5	0,7563
2,0	— 0,2850	1,2	— 7,9148	2,0	0.2902
		1,25	— 17,2385		
		1,293	∞		
		1,35	13,3070		
		1,5	3,7311		
		2,0	1,1399		

Sie ergeben sich nach der Cramerschen Regel als die Quotienten zweier Determinanten, die von derselben Ordnung wie die Gleichungssysteme, also von der vierten oder fünften Ordnung, sind. Zunächst sind nach den Inceschen Rechnungen [3] die Nullstellen der Nennerdeterminanten, also die Unbeschränktheitsstellen der Lösung, die nach Abschnitt Ic auf den C_n-Kurven der Struttschen Karte liegen müssen, bekannt. Für die „Breite" der Resonanzstellen der einzelnen Vergrößerungsfunktionen ist nun vor allen Dingen die Lage der Nullstellen der Zählerdeterminanten wichtig. Sie wurden deshalb zunächst bestimmt (siehe auch Zahlentafeln 1 bis 3). Für einzelne von ihnen lassen sich die Kurven der Resonanzstellen in der λ-γ-Ebene allgemein (für alle Werte des Parameters γ) angeben, und zwar liegen die Nullstellen von $\frac{A_0}{a_0}$ stets auf den S_n-Kurven der Struttschen Karte, die kleinste Nullstelle von $\frac{A_1}{a_1}$, $\frac{A_2}{a_1}$ und $\frac{A_1}{a_2}$ stets auf der γ-Achse, also bei $\lambda = 0$, während die beiden kleinsten Nullstellen von $\frac{A_2}{a_2}$ stets durch die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda - \frac{\gamma^2}{2} = 0$$

gegeben sind, ganz unabhängig von dem Grad der zur Berechnung der Vergrößerungsfunktionen gewählten Annäherungsdeterminante.

Die erhaltenen Zahlenwerte sind, wie schon erwähnt, in den Zahlentafeln 1 bis 3 niedergelegt. Zur Bezeichnung ist noch zu sagen, daß der obere Index 5 angibt, daß der Zahlenwert aus fünfreihigen Annäherungsdeterminanten berechnet wurde.

Wir wenden uns nunmehr einer kurzen Diskussion der Resultate zu. Für $\gamma = 1$ fallen in den betrachteten Bereich zwei Resonanzstellen. An der ersten Resonanzstelle (Zahlentafeln 1 bis 3) bei $\lambda_0 = -0{,}379$ ist der Resonanzbereich nicht nur für die Vergrößerungs-

Zahlentafel 3. $\gamma = 1$.

λ	$\frac{A_0^{(5)}}{a_2}$	λ	$\frac{A_1^{(5)}}{a_2}$	λ	$\frac{A_2^{(5)}}{a_2}$	λ	$\frac{A_2^{(5)}}{a_2}$
— 0,5	— 0,2517	— 0,45	— 0,4003	— 0,45	— 0,2712	1,28	— 2,3383
— 0,45	— 0,4448	— 0,405	— 1,0076	— 0,40	— 0,3695	1,293	$-\infty$
— 0,41	— 1,0424	— 0,40	— 1,2315	— 0,384	— 0,7660	1,3	3,4833
— 0,40	— 1,5394	— 0,39	— 2,2623	— 0,382	— 1,0692	1,31	1,2043
— 0,39	— 2,9004	— 0,379	∞	— 0,381	— 1,4002	1,33	0,3544
— 0,379	∞	— 0,37	2,9585	— 0,380	— 2,1746	1,35	0,1036
— 0,37	4,0217	— 0,355	1,0388	— 0,379	∞	1,366	0
— 0,35	1,2113	— 0,35	0,8479	— 0,378	5,7568	1,5	— 0,2521
— 0,345	1,0348	— 0,3	0,2752	— 0,377	1,7338	2,0	— 0,4352
— 0,3	0,4587	— 0,2	0,0881	— 0,376	1,0605		
— 0,2	0,2203	0	0	— 0,375	0,4021		
0	0,1259	0,5	— 0,1009	— 0,372	0,2169		
0,5	0,1009	0,8	— 0,2114	— 0,370	0,1104		
0,8	0,1322	1,0	— 0,4051	— 0,368	0,0344		
1,0	0,2026	1,1	— 0,6519	— 0,366	0		
1,1	0,2964	1,18	— 1,1641	— 0,364	— 0,0330		
1,2	0,5958	1,20	— 1,4298	— 0,360	— 0,0770		
1,24	1,0304	1,22	— 1,8407	— 0,355	— 0,1110		
1,25	1,2686	1,24	— 2,5613	— 0,350	— 0,1332		
1,27	2,3520	1,25	— 3,1715	— 0,3	— 0,2018		
1,28	3,9828	1,27	— 5,9742	— 0,2	— 0,2291		
1,285	6,6481	1,293	∞	0	— 0,2518		
1,293	∞	1,31	8,4008	0,5	— 0,3027		
1,3	— 7,9166	1,32	5,2985	0,8	— 0,3489		
1,31	— 3,2064	1,35	2,5421	1,0	— 0,4051		
1,32	— 2,0070	1,37	1,9006	1,1	— 0,4623		
1,35	— 0,9416	1,5	0,7563	1,2	— 0,6196		
1,37	— 0,6936	2,0	0,2902	1,25	— 0,9515		
1,5	— 0,2521			1,26	— 1,1357		
2,0	— 0,0726			1,27	— 1,4780		

funktion $\frac{A_0}{a_0}$ sehr breit, was zu erwarten war, sondern auch für die Vergrößerungsfunktion $\frac{A_1}{a_0}$, während er für die Vergrößerungsfunktion $\frac{A_2}{a_0}$ sehr schmal ist. Dasselbe Bild erhalten wir für die Vergrößerungsfunktionen $\frac{A_\nu}{a_1}$, doch sind hier die Resonanzbreiten etwas geringer geworden. Dagegen sind alle Resonanzbreiten der von der Störamplitude a_2 herrührenden Vergrößerungsfunktionen sehr klein.

Bei der zweiten Resonanzstelle, $\lambda_1 = 1{,}293$, haben sich die Rollen von $\frac{A_1}{a_\mu}$ und $\frac{A_0}{a_\mu}$ vertauscht; hier sind die Resonanzbreiten der Vergrößerungsfunktionen $\frac{A_0}{a_\mu}$ noch bemerkenswert groß. Wie zu erwarten, ist die Resonanz für die Vergrößerungsfunktionen $\frac{A_2}{a_\mu}$ hier stärker ausgeprägt als an der ersten Resonanzstelle, wie auch alle durch die Störamplitude a_2 hervorgerufenen Vergrößerungsfunktionen hier größere Resonanzbreiten aufweisen als an der ersten Resonanzstelle.

Für größere Werte von λ zeigt das Verhalten der Lösung y_{part} praktisch nur noch geringe Unterschiede gegenüber dem Verhalten der Lösung der entsprechenden Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (also für $\gamma = 0$). Wir stellten beim Berechnen der obengenannten Vergrößerungsfunktionen im Intervall $\lambda = 2{,}5$ bis $\lambda = 8$ fest, daß die Resonanzbreite der Vergrößerungsfunktion $\frac{A_2}{a_2}$ in der Umgebung der dritten Resonanzstelle bei $\lambda_2 = 4{,}0353$

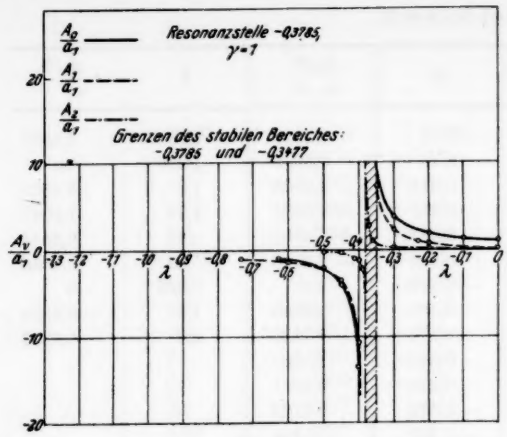


Bild 4.

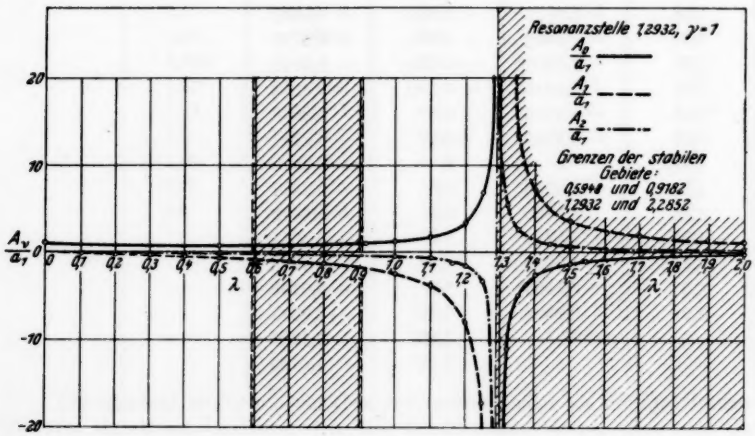


Bild 5.

bereits bei weitem die aller anderen Vergrößerungsfunktionen überwiegt. Die Zahlenwerte für diesen Bereich von λ wurden deshalb nicht mehr mit aufgenommen.

In den Bildern 4 und 5 ist der Verlauf der Vergrößerungsfunktionen $\frac{A_\nu}{a_1}$ für die beiden ersten Resonanzstellen aufgezeichnet (Zahlentafel 1 bis 3). Die schraffierten Gebiete sind hier stabil; die strichpunktierten Linien geben die Resonanzstellen an. Wir wählten gerade dieses Beispiel, um zu zeigen, wie stark die Resonanz von $\frac{A_0}{a_1}$ noch ausgeprägt ist. Hieran läßt sich nämlich, von einem etwas anderen Gesichtspunkt aus als es üblich ist [4], die Auswanderungserscheinung des Pendels mit horizontal erschüttertem Aufhängepunkt ablesen, ein physikalischer Vorgang, der, für nicht zu große Winkel, durch eine inhomogene Mathieusche Differentialgleichung mit der Störfunktion $a_1 \cos x$ (mit der ursprünglichen stabilen Gleichgewichtslage als Mittellage) beschrieben wird. (Für kleine Werte von λ und γ mit $\lambda \ll \gamma$, also in jenem Wertebereich von λ und γ, für den diese Erscheinung bis jetzt untersucht wurde, ist der Unterschied zwischen $\frac{A_0}{a_1}$ und $\frac{A_1}{a_1}$ im Bereich der ersten Resonanzstelle noch viel stärker ausgeprägt, da $\frac{A_0}{a_1}$ mit γ, $\frac{A_1}{a_1}$ mit λ linear geht.)

B. Einfluß der Dämpfung.

I. Lösung im Innern der Gebiete. Resonanzbedingung. Resonanzlösungen.

Wir wollen im folgenden untersuchen, ob der Einfluß der Dämpfung auf die partikulare Lösung der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung ein ähnlicher ist wie bei der Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, d. h. vor allen Dingen, ob „scharfe" Resonanzspitzen, also Unendlichkeitsstellen der Lösung, hier gleichfalls unmöglich sind.

Wir schreiben die inhomogene Mathieusche Differentialgleichung zunächst in der Form

$$y'' + 2\delta y' + (\lambda_1 + \gamma \cos x)\, y = d\, e^{i\frac{p}{\Omega}x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30a);$$

diese Differentialgleichung kann bekanntlich durch die Transformation $y = z\, e^{-\delta x}$ in die folgende Differentialgleichung für z verwandelt werden:

$$z'' + (\lambda + \gamma \cos x)\, z = d\, e^{\delta x} e^{i\frac{p}{\Omega}x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30b)$$

mit

$$\lambda = \lambda_1 - \delta^2.$$

Wir wollen die Lösung z_{part} zunächst in den Gebieten bestimmen; das Fundamentalsystem ist also nach (5) gegeben. Berechnen wir die Lösung z_{part} von Differentialgleichung (30b) wie stets in der vorhergehenden Untersuchung über die Variation der Konstanten, so ergibt sich nach dem Ausintegrieren:

$$z_{part}=\frac{-d}{\Delta}\left[\begin{aligned} &e^{\mu x}\sum_{-\infty}^{+\infty}a_\nu e^{i\nu x}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_\nu}{\delta+i\frac{p}{\Omega}-\mu+i\nu}e^{\left(i\frac{p}{\Omega}+\delta-\mu+i\nu\right)x}\\ -&e^{-\mu x}\sum_{-\infty}^{+\infty}b_\nu e^{i\nu x}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_\nu}{\delta+i\frac{p}{\Omega}+\mu+i\nu}e^{\left(i\frac{p}{\Omega}+\delta+\mu+i\nu\right)x}\end{aligned}\right] \quad \ldots\ldots (31),$$

solange nur die Bedingung

$$\left(\pm\mu+i\frac{p}{\Omega}+\delta+i\nu\right)\neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

für alle μ und ν erfüllt ist. Multiplizieren wir aus und gehen wieder zur ursprünglichen Koordinate über, so erhalten wir die Lösung in der Form

$$y_{part}=d\,e^{i\frac{p}{\Omega}x}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_\nu e^{i\nu x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33).$$

Es ergibt sich also hier genau wie bei Abwesenheit von Dämpfung für die Lösung y_{part} im Fall α) $\left(\frac{p}{\Omega}\neq\frac{n}{2}\right)$ eine beschränkte periodische Funktion zweiter Art, in den Fällen β) und γ) eine beschränkte periodische Funktion mit der ganzen bzw. halben Frequenz der Belegungsfunktion, solange nur Bedingung (32) stets erfüllt ist.

Wann ist nun diese Bedingung nicht mehr erfüllt? Die Ungleichung (32) erhält reelle und imaginäre Glieder. Damit sie nicht mehr gilt, müssen die beiden Gleichungen

$$\left(\pm Im\,\mu+\frac{p}{\Omega}+\nu\right)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

und

$$(\pm Re\,\mu+\delta)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

einzeln erfüllt sein. Aus diesen beiden Resonanzbedingungen kann man sofort die folgenden Ergebnisse ablesen: In den stabilen Gebieten der Differentialgleichung (30b) kann Bedingung (35) nie erfüllt sein, da hier μ rein imaginär ist. Die Lösung y_{part} ist also in den stabilen Gebieten in allen drei Fällen α), β) und γ) beschränkt. Die Kurven der Resonanzstellen in den stabilen Gebieten im Fall α), die wir für Dämpfungsfreiheit erhielten, verschwinden also; die Dämpfung übt hier einen ähnlichen Einfluß aus wie bei der entsprechenden Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. In den instabilen Gebieten der Differentialgleichung (30b) ist im Fall α) die Bedingung (34) nicht mehr erfüllbar, die Lösung y_{part} also überall in den instabilen Gebieten beschränkt.

Im Falle β) lassen sich die Gl. (34) und (35) für jene Kurven in den „ganzzahligen" (in Bild 1 mit 1 bezeichneten) Instabilitätsintervallen erfüllen, für die δ gleich dem reellen Anteil von μ, den wir mit dem Buchstaben a bezeichnen wollen, ist; in den halbzahligen (in Bild 1 mit $^1/_2$ bezeichneten) Instabilitätsintervallen dagegen nicht, da der Imaginärteil von μ hier halbzahlig ist. Die Kurven $a=\delta$ in den instabilen Gebieten der Lösung in z sind zugleich die Grenzkurven der homogenen Lösung der Differentialgleichung (30a), also der Lösung in y, wie man leicht verifizieren kann, wenn man sich die homogene Lösung der Differentialgleichung (30b) hinschreibt und dann mittels der Transformation $y=z\cdot e^{-\delta x}$ zur Koordinate y übergeht.

Für jene Werte von ν und a, für die die Resonanzbedingungen erfüllt sind, ist aber Formel (31) nicht mehr gültig. (Man setze in der Formel $\frac{p}{\Omega}=n$). Wir bestimmen diesen Anteil des Integrals gesondert und erhalten ihn in der Form (für $\nu=-n+Im\,\mu=m$ und $a=\delta$; $Im\,\mu=$ ganze Zahl)

$$z_{part}=\frac{d}{\Delta}\left[-e^{\delta x}\sum_{-\infty}^{+\infty}a_\nu e^{i\nu x}\cdot b_m x\right] \quad \ldots\ldots\ldots (36).$$

In der ursprünglichen Koordinate y geschrieben, ergibt sich also die partikulare Lösung y_{part} zu

$$y_{part} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x} + x \sum_{-\infty}^{+\infty} d_\nu e^{i\nu x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37).$$

Entsprechend läßt sich im Falle γ), also für $\frac{p}{\Omega} = \frac{2n+1}{2}$, zeigen, daß die partikulare Lösung auf jenen Kurven in den halbzahligen instabilen Gebieten, für die $a = \delta$ ist, die Form hat

$$y_{part} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{\frac{2\nu+1}{2}} e^{i\frac{2\nu+1}{2}x} + x \sum_{-\infty}^{+\infty} d_{\frac{2\nu+1}{2}} e^{i\frac{2\nu+1}{2}x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

Die Lösungen (37) und (38) stellen die Resonanzlösungen des Falles β) und γ) dar.

Wir erhalten also für die inhomogene Mathieusche Differentialgleichung mit Dämpfungsglied das Ergebnis, daß, im Gegensatz zu den Lösungen der Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, auch bei Anwesenheit von Dämpfung „scharfe" Resonanzstellen der Lösung (Unendlichkeitsstellen) auftreten. Und zwar ergeben sie sich in den Fällen β) und γ), $\frac{p}{\Omega} = \frac{n}{2}$, also bei Störfrequenzen, die bei Abwesenheit von Dämpfung zu solchen Resonanzlösungen führen, die mit x^2 gegen Unendlich gehen.

II. Lösungen auf den Grenzkurven $a = 0$.

Wir wollen jetzt noch kurz angeben, wie sich die Lösungen, die zu den Wertepaaren λ und γ der Grenzkurven (Grenzkurven für die Lösungen in z) gehören, verhalten. Wir können hier ohne wesentliche Veränderungen die Überlegungen aus Abschnitt A IIa übernehmen, wenn wir uns stets statt der Koordinate y die Koordinate ξ und statt der Störfunktion $e^{i\frac{p}{\Omega}x}$ die Störfunktion $e^{\left(i\frac{p}{\Omega}+\delta\right)x}$ gesetzt denken. Führen wir die Rechnungen hierfür durch, so sehen wir, daß die Glieder mit x in den Ausdrücken für z_{part} sich stets gegenseitig aufheben, und zwar in allen drei Fällen α), β) und γ) sowohl auf den ganz- als auch auf den halbzahligen Grenzkurven ($a = 0$); dies deckt sich mit der Tatsache, daß in allen drei Fällen die Resonanzbedingungen (34) und (35) für die Parameter der Grenzkurven nie zusammen erfüllt sind. Die Form der Lösungen ist wieder durch Formel (33) gegeben; in den Fällen β) und γ) wird die Lösung daraus durch Einsetzen von $\frac{p}{\Omega} = n$ bzw. $\frac{p}{\Omega} = \frac{2n+1}{2}$ gewonnen.

III. Berechnung und Aufzeichnung von „Dämpfungskurven" in den drei ersten instabilen Gebieten nullter, halber und erster Ordnung für die Werte $a^2 = \delta^2 = 10^{-4}$; 10^{-3}; 10^{-2}; $5 \cdot 10^{-2}$ und 10^{-1}.

Obwohl der Einfluß der Dämpfung auf die Veränderung der Stabilitätsgebiete und damit auf die Verschiebung der Grenzkurven zwischen stabilen und instabilen Gebieten qualitativ längst bekannt ist [1, S. 217], so findet man trotzdem in der vorliegenden Literatur nur verstreut und unsystematisch Zahlenmaterial dazu [5]. Der Grund ist wohl in den großen Rechenschwierigkeiten zu suchen, mit denen die Bestimmung der Kurven konstanter Werte von $Re\,\mu(\lambda, \gamma) \equiv a = \text{constans}$ in den instabilen Gebieten verbunden ist. Da diese Kurven $Re\,\mu \equiv a = \text{constans}$ stets bei einer ganz bestimmten Größe der Dämpfungskoeffizienten, nämlich für $a = \delta$, als neue Grenzkurven in Erscheinung treten, so haben wir sie im folgenden auch als „Dämpfungskurven" bezeichnet. Weil die Bedeutung dieser Kurven als Grenzkurven der Stabilitätsgebiete und zugleich als „Kurven der Resonanzstellen" (siehe Teil B I) bei gegebener Dämpfung klar auf der Hand liegt, haben wir für einige Werte von $a^2 = \delta^2$, nämlich für $a^2 = \delta^2 = 10^{-4}$; 10^{-3}; 10^{-2}; $5 \cdot 10^{-2}$ und 10^{-1}, diese Kurven bis zum Wert $\gamma = 1$ im instabilen Gebiet halber Ordnung und $\gamma = 2{,}5$ im instabilen Gebiet erster Ordnung bestimmt. Im instabilen Gebiet nullter Ordnung (siehe Bilder 1 und 2; der konstante Imaginärteil von μ ist hier null) wurde wegen der verhältnismäßigen Kleinheit der von uns gewählten Werte $a^2 = \delta^2$ nur die Kurve für $a^2 = \delta^2 = 10^{-1}$ bis zum Wert $\gamma = 1$ berechnet.

Die Kurven wurden im Gebiet halber Ordnung aus vierreihigen, im Gebiet nullter und erster Ordnung aus fünfreihigen Näherungsdeterminanten der Hillschen Determinante nach dem Hornerschen Näherungsverfahren bestimmt. Für das Gebiet halber Ordnung liefert bereits die quadratische Näherung mit $\gamma_{\min} = 2a = 2\delta$ für die von uns gewählten Werte von a eine sehr gute Näherung. Es ergeben sich auf Grund dieser Rechnungen die in den Zahlentafeln 4 bis 6 angegebenen Werte und die in Bild 6 aufgezeichneten Kurven. Die Ge-

Zahlentafel 4. Instabiler Bereich 1/2. Ordnung.

$a^2=\delta^2=10^{-4}$			$a^2=\delta^2=10^{-3}$			$a^2=\delta^2=10^{-2}$		
γ	λ_1	λ_2	γ	λ_1	λ_2	γ	λ_1	λ_2
0,0201	0,2488	0,250	0,0633	0,2477	0,2495	0,1998	0,2342	0,2353
0,0203	0,2482	0,2518	0,0635	0,4676	0,2507	0,20	0,2332	0,2393
0,0211	0,2469	0,2521	0,064	0,2437	0,2570	0,21	0,2248	0,2452
0,0218	0,2455	0,2540	0,10	0,2120	0,2830	0,202	0,2208	0,2495
0,05	0,2270	0,2780	0,30	0,0920	0,3840	0,205	0,2124	0,2575
0,10	0,2040	0,2970	0,50	−0,0280	0,4640	0,30	0,1180	0,3390
0,30	0,0900	0,3870	1,0	−0,3460	0,5970	0,50	−0,0150	0,4390
0,50	−0,0250	0,4650				1,0	−0,3450	0,5840
1,00	−0,3460	0,5980						

$a^2=\delta^2=5\cdot10^{-2}$			$a^2=\delta^2=10^{-1}$		
γ	λ_1	λ_2	γ	λ_1	λ_2
0,4614	0,1738	0,1760	0,6750	0,0994	0,1010
0,4615	0,1708	0,1792	0,70	0,0123	0,1801
0,4625	0,1595	0,1868	0,75	0,0537	0,2356
0,4650	0,1548	0,2017	1,0	−0,2940	0,3720
0,470	0,1336	0,2118			
0,50	−0,0790	0,2620			
1,0	−0,3270	0,4940			

Zahlentafel 5. Instabiler Bereich erster Ordnung.

$a^2=\delta^2=10^{-4}$			$a^2=\delta^2=10^{-3}$			$a^2=\delta^2=10^{-2}$		
γ	λ_1	λ_2	γ	λ_1	λ_2	γ	λ_1	λ_2
0,2855	1,0119	1,0138	0,5168	1,0363	1,0379	0,96973	1,0881	1,08995
0,2860	1,0110	1,0147	0,5170	1,0346	1,0395	0,96975	1,0873	1,0908
0,2870	1,0099	1,0160	0,5180	1,0315	1,0429	0,9698	1,0860	1,0920
0,2900	1,0082	1,0183	0,520	1,0281	1,0468	0,970	1,0834	1,0947
0,30	1,0049	1,0233	0,530	1,0197	1,0579	0,990	1,0432	1,1405
0,35	0,9973	1,0404	0,55	1,0104	1,0723	1,0	1,0335	1,1530
0,40	0,9920	1,0562	0,60	0,9962	1,0999	1,1	0,9776	1,2365
0,50	0,9825	1,0894	0,80	0,9598	1,1929	1,2	0,9411	1,2996
0,60	0,9725	1,1260	0,85	0,9519	1,2152	1,5	0,8527	1,4590
0,80	0,9485	1,2060	0,90	0,9433	1,2384	2,0	0,7099	1,6833
1,0	0,9195	1,2933	1,0	0,9261	1,2841			
2,0	0,6970	1,7220	2,0	0,6984	1,7184			

Zahlentafel 6. Instabiler Bereich nullter und erster Ordnung.

$a^2=\delta^2=5\cdot10^{-2}$			$a^2=\delta^2=10^{-1}$			
γ	λ_1	λ_2	γ	λ_0	λ_1	λ_2
1,58506	1,1098	1,1117	2,5	−1,4525	0,622	1,566
1,58507	1,1088	1,1127	2,1	—	0,8926	1,275
1,58510	1,1073	1,1142	2,00655	—	1,0770	1,0799
1,58520	1,1045	1,1171	2,006578	—	1,07768	1,07956
1,58530	1.1026	1,1190	2,0	−1,0773		
1,5855	1,0998	1,1218	1,5	−0,7242		
1,5860	1 0947	1,1270	1,0	−0,4137		
1,5880	1,0825	1,1396	0,8	−0,3096		
1,590	1,0745	1,1480	0,5	−0,1861		
1,60	1,0480	1,1765	0,3	−0,1317		
1,70	0,9399	1,3033	0	0		
1,80	0,8771	1,3830				
2,00	0,7805	1,5076				

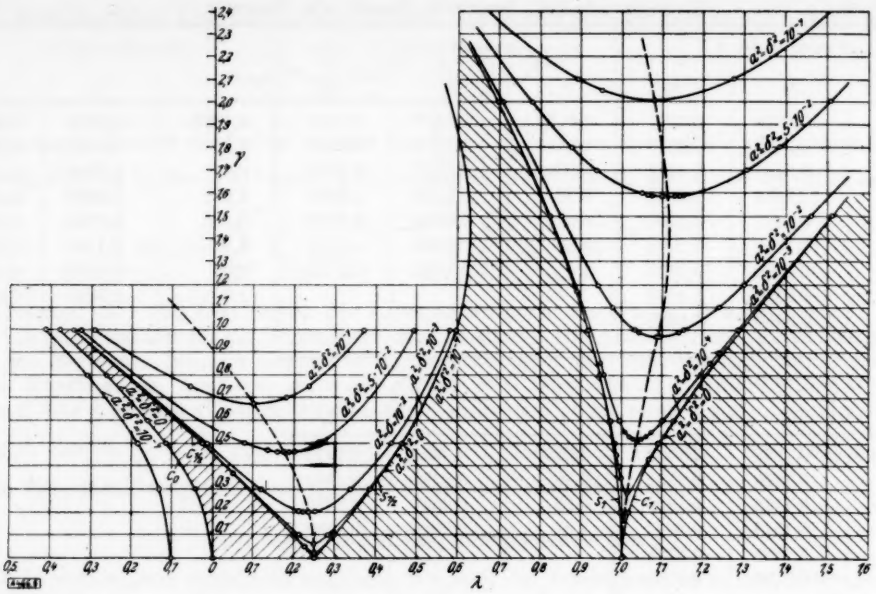


Bild 6. Dämpfungskurven in den Instabilitätsbereichen nullter, halber und erster Ordnung für $a^2=\delta^2=10^{-4}$; 10^{-3}; 10^{-2}; $5\cdot10^{-2}$ und 10^{-1}.

nauigkeit der Rechnung wurde, da jede weitere Annäherung sehr zeitraubend gewesen wäre, dadurch abgeschätzt, daß in die benützten Gleichungen der Wert $a=\delta=0$ eingesetzt und das Ergebnis mit den genauen Werten von Ince verglichen wurde. Man erhält z. B. für das instabile Gebiet erster Ordnung folgende Fehler in % der Inceschen Werte:

γ	Abweichungen λ_1	Abweichungen λ_2
1	0,087 %	0,070 %
1,5	0,409 %	0,285 %
2,0	1,530 %	0,873 %
2,5	4,287 %	2,041 %

. . . . . (39).

Die Werte der Zahlentafeln 4 bis 6 wurden über die Fehlergenauigkeit (39) berechnet, um den Verlauf der Kurven an sich, besonders der flachen Minima, deutlich zu machen. Die Fehler sind einseitig, d. h. alle λ-Werte sind um die angegebenen Fehler zu weit nach rechts verschoben.

C. Zusammenfassung und Vergleich der erhaltenen Resultate mit den bisher vorliegenden.

Wir erhalten als wichtigstes Ergebnis, daß die partikulare Lösung für alle jene Parameterwerte λ und γ der Differentialgleichung eine beschränkte Funktion ist, für die die Resonanzbedingung $\left(i\nu+i\frac{p}{\Omega}\pm\mu\right)=0$ (bei Abwesenheit von Dämpfung) bzw. $\left(i\nu+i\frac{p}{\Omega}\pm\mu+\delta\right)=0$ (bei Anwesenheit von Dämpfung) nicht erfüllt ist. Für jene Kurven der Parameterwerte λ und γ, für die die Resonanzbedingung erfüllt ist (Kurven der Resonanzstellen) geht bei Abwesenheit von Dämpfung die Resonanzlösung im Fall α), wenn also die Störfrequenz weder gleich einem ganz- noch halbzahligen Vielfachen der Frequenz der Belegungsfunktion ist, mit x gegen Unendlich, während sie in den Fällen β) und γ), also für $\frac{p}{\Omega}=\frac{n}{2}$, wenn also die Frequenz der Störfunktion gleich der ganzen oder halben Frequenz der Belegungsfunktion

bzw. gleich einem ganzzahligen Vielfachen der ganzen oder einem ungeraden ganzzahligen Vielfachen der halben Frequenz der Belegungsfunktion ist, mit x^3 gegen Unendlich geht. Bei Anwesenheit von Dämpfung gibt es im Falle α) keine „scharfen" Resonanzstellen mehr, in den Fällen β) und γ) geht die Lösung dann nur mehr mit x gegen Unendlich.

Wir haben unsere Untersuchungen der Übersichtlichkeit halber auf die inhomogene Mathieusche Differentialgleichung beschränkt. Die wesentlichen Züge der erhaltenen Resultate bleiben aber auch für die inhomogene Hillsche Differentialgleichung bestehen.

Wir wollen noch kurz angeben, was an Ergebnissen über die inhomogene Hillsche (und somit auch Mathieusche) Differentialgleichung bereits in der bis jetzt erschieneneu Literatur vorhanden ist. Sehr groß ist die Menge jener Arbeiten, die sich mit der Hillschen Differentialgleichung mit Störfunktion befassen, deren Frequenz gleich der ganzen Frequenz bzw. gleich der halben Frequenz der Belegungsfunktion ist. Es handelt sich hier fast immer um die Beantwortung technisch wichtiger Fragestellungen. Die benutzten Ansätze sind eigentlich immer richtig; es fehlt aber im allgemeinen die genaue Herleitung dieser Ansätze. (Siehe auch Erdélyi [6] sowie die dort am Ende der Arbeit zusammengestellte Literatur.) Dagegen enthält die Arbeit [6] von Erdélyi eine Herleitung der Form des partikularen Integrals einer inhomogenen Hillschen Differentialgleichung mit Dämpfungsglied und einer periodischen Störfunktion, deren Frequenz weder ein ganzzahliges der ganzen noch ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Frequenz der Belegungsfunktion ist; und zwar erfolgt die Ableitung der Form des partikularen Integrals gleichfalls über die hier benutzte Methode der Variation der Konstanten. Erdélyi erhält genau wie wir das Resultat, daß diese Lösung überall in den Gebieten eine beschränkte periodische Funktion zweiter Art ist. Dann aber schließt E. weiter aus der Form der Fundamentalintegrale der homogenen Gleichung auf den ursprünglichen Grenzkurven (Grenzkurven in z; $a=0$), daß die Lösung y_{part} hierfür einen mit x explizit gebenden Anteil aufweist, also für die Wertepaare λ und γ der ursprünglichen Grenzkurven unbeschränkt wird, ein Ergebnis, das sich, wie die vorliegende Untersuchung zeigt, nicht aufrechterhalten läßt. Die Lösung y_{part} der inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung für diese Störfrequenzen mit (und auch ohne) Dämpfungsglied ist auf diesen Kurven beschränkt. Die Resonanzstellen der Lösungen hängen, wie wir nochmal betonen möchten, nur von der Erfüllung der Resonanzbedingung $\left(\pm\mu + i\frac{p}{\Omega} + \delta + i\nu\right) = 0$ und nicht von der Lage der Wertepaare λ und γ in den Gebieten oder auf den Grenzkurven ab.

Außer der von E. im Anhang der Arbeit [6] zusammengestellten Literatur über die inhomogene Hillsche Differentialgleichung möchten wir noch vor allem auf die Behandlung der inhomogenen Hillschen Differentialgleichung, wie sie sich in den Arbeiten über das Problem der periodisch veränderlichen Massenträgheit bei Kurbelwellen findet [7], hinweisen. (Dieselbe Methode der Behandlung einer inhomogenen Mathieuschen Differentialgleichung findet sich auch bei Mettler [8].) Dort wird auf einem anderen Wege als auf dem hier eingeschlagenen die Form der Lösung y_{part} für die Fälle β) und γ) abgeleitet und der Satz aufgestellt, daß die Resonanzstellen der partikularen Lösung bei jenen Werten der Parameter der Differentialgleichung liegen, für die die Lösung der homogenen Differentialgleichung ebenfalls eine periodische Funktion mit der ganzen oder halben Frequenz der Belegungsfunktion ist.

Schrifttumverzeichnis.

[1] K. Klotter: Forsch. Ing.-Wes., Bd. 12 (1941), S. 209.

[2] M. J. O. Strutt: Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Bd. I, Heft 3, Berlin 1932. Siehe auch das Literaturverzeichnis am Ende des Buches.

[3] E. L. Ince: Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Bd. 52 (1931/32), S. 355.

[4] K. Klotter und G. Kotowski: Z. angew. Math. Mech., Bd. 19 (1939), S. 289.

[5] E. Mettler: Mitt. Forsch.-Anst. Gutehoffnungshütte-Konzern, Bd. 8 (1940), S. 1.

[6] A. Erdélyi: Arch. Elektrotechn., Bd. 29 (1935), S. 473.

[7] F. Kluge: Ing.-Arch., Bd. 2 (1931), S. 119. Siehe auch die dort angegebene Literatur.

[8] E. Mettler: Forschungshefte aus dem Gebiet des Stahlbaues, Heft 4 (1941), S. 1.

XUM

Affine Transformationen durch Doppel-Photographie.

Von *Ulrich Graf* in Danzig.

Bei der Diapositiv-Herstellung von Schaubildern, Diagrammen, Nomogrammen, bei der Reproduktion von Zeichnungen aus Büchern u. ä. müßte eine in Größe und Format irgendwie vorliegende Urzeichnung auf das Diapositiv-Format (beliebiger Größe) umgezeichnet werden, um daraus phototechnisch durch ähnliche Verkleinerung das (voll ausgefüllte) Diapositiv zu gewinnen. Unter Vermeidung der Umzeichnung läßt sich rein reproduktionstechnisch eine Verkleinerung in verschiedenen Maßstäben in Höhe und Breite (also eine affine Transformation) vornehmen, die die unmittelbare photomechanische Reproduktion auf beliebige Formate ermöglicht. Die bei diesem Verfahren maßgebenden geometrischen Gesetzmäßigkeiten werden untersucht.

1. Das Photo einer ebenen Figur liefert, sofern von dem trivialen Fall der ähnlichen Reproduktion abgesehen wird, ein perspektives Bild der Urzeichnung, bei dem die ursprünglich parallelen Geraden zu einem Fluchtpunkt zusammenlaufen, die bekannten perspektiven Verkürzungen auftreten usw. Durch ein erneutes Photographieren dieses Photos kann unter besonderen Bedingungen erreicht werden, daß in dem zweiten Photo die perspektiven Eigenschaften kompensiert werden und durch die iterierte Photographie ein affin transformiertes Bild der Ausgangszeichnung gewonnen wird, bei dem also die Parallelität und die Teilverhältnisse erhalten bleiben. Dieses „fluchtpunktlose Doppel-Photographieren" wird im folgenden geschildert; es ist eine einfache Anwendung des Satzes: Sind zwei Bilder perspektiv zu einem dritten mit derselben Geraden als Verschwindungsgeraden, so sind sie untereinander affin. Die benutzten Photographien sind stets als exakte Zentralperspektiven angenommen.

2. Die erste Photographie der Urzeichnung $\{P_0\}$ erfolge unter einem Neigungswinkel a_0 der Plattenebene gegen die Zeichenebene (Bild 1, Achsenschnitt). Alle Geraden in $\{P_0\}$, die sich auf der Verschwindungsgeraden v_0 (Hauptverschwindungspunkt V_0) schneiden, werden im Bilde $\{\mathfrak{P}\}$ parallel, und alle Geraden in $\{P_0\}$, die parallel sind, haben Bildgeraden in $\{\mathfrak{P}\}$, die sich auf der Fluchtgeraden g_∞ (Hauptfluchtpunkt F) schneiden. Ist d_0 die Objektiv-Entfernung von der Zeichenebene und f die Bildweite der Kammer, sind ferner H_0 und $\mathfrak{H}$ die Hauptpunkte von $\{P_0\}$ und $\{\mathfrak{P}\}$, so gilt für den Abstand $\overline{H_0 V_0}$ der Verschwindungsgeraden vom Hauptpunkt H_0 in $\{P_0\}$ und den Abstand $\overline{\mathfrak{H} F}$ der Fluchtgeraden vom Hauptpunkt $\mathfrak{H}$ in $\{\mathfrak{P}\}$

$$\overline{H_0 V_0} = d_0 \cdot \operatorname{ctg} a_0 \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{H} F} = f \cdot \operatorname{ctg} a_0 .$$

Beim Einstellen der Scharfabbildung ist die Scheimpflug-Bedingung zu beachten, der zufolge die Ebene des Objektivs O_0 durch die Spurgerade s_0 (Hauptspurpunkt S_0) der Plattenebene mit der Zeichenebene laufen muß.

3. Ist das Zwischenphoto $\{\mathfrak{P}\}$ der Urzeichnung $\{P_0\}$ in der geschilderten Weise phototechnisch hergestellt, so läßt sich aus ihm durch Photographieren in genauer Umkehrung des unter 2. geschilderten Ganges die Urzeichnung $\{P_0\}$ wiedergewinnen. Diese Aufnahmelage zeigt Bild 2, die sich von Bild 1 nur durch die Stellung und die Ausziehart unterscheidet. Die Bilder 1 und 2 können — abgesehen von dem skizzenhaft angedeuteten Photogerät — miteinander zur Deckung gebracht werden.

Wird dagegen das Zwischenphoto $\{\mathfrak{P}\}$ von irgendeiner anderen Stelle O aus unter einem Neigungswinkel a aufgenommen und dabei die Forderung erfüllt, daß die Verschwindungsebene dieser neuen Aufnahme die Fluchtgerade g_∞ von $\{\mathfrak{P}\}$ enthält (d. h., daß die Plattenebene der neuen Aufnahme parallel ist zu der Ebene durch g_∞ und das Objektivzentrum O), so entsteht als Photo des Photos $\{\mathfrak{P}\}$ ein neues Bild $\{P\}$, Bild 3. Wiederum sind dabei die Bilder aller Geraden in $\{\mathfrak{P}\}$, die sich auf g_∞ schneiden, in $\{P\}$ parallel, oder, anders ausgedrückt, in den beiden Bildern $\{P_0\}$ und $\{P\}$ geht die unendlich ferne Gerade perspektiv aus ein und derselben Geraden g_∞ eines dritten Bildes $\{\mathfrak{P}\}$ hervor. Dann sind die beiden Bilder $\{P_0\}$ und $\{P\}$ zueinander affin, und da $\{P_0\}$ die vorgelegte Urzeichnung war, ist von ihr in $\{P\}$ photomechanisch eine Affinfigur gewonnen. Bild 4 zeigt zusammen die beiden Photolagen $\{P_0\}$ und $\{P\}$, durch die aus dem nach Bild 1 erzeugten Zwischenphoto $\{\mathfrak{P}\}$ sowohl die Originalzeichnung $\{P_0\}$ als auch ihr affines Bild $\{P\}$ erzeugbar ist. Wird an Stelle des Originalphotos $\{\mathfrak{P}\}$ eine λ-fache Vergrößerung benutzt, so ist überall f durch λf zu ersetzen.

4. Zur analytischen Erfassung dieses geometrischen Sachverhaltes, den Bild 5 in anschaulicher Skizze zeigt, wird ein XYZ-Achsenkreuz benutzt, dessen XY-Ebene das Zwischen-

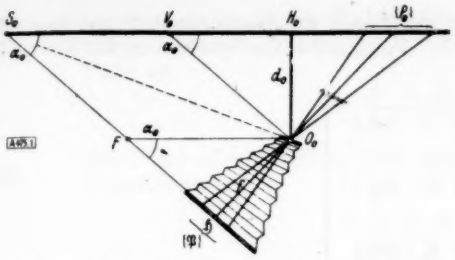


Bild 1. Die Herstellung des Zwischenphotos $\{\mathfrak{P}\}$

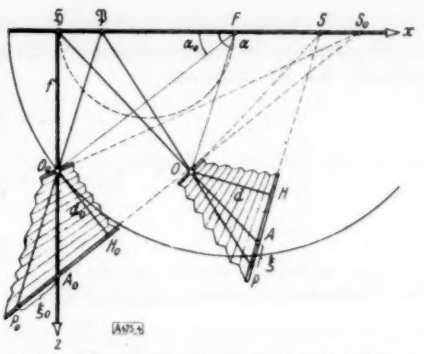


Bild 4. Die Aufnahmelagen für die Urzeichnung und das Affinbild.

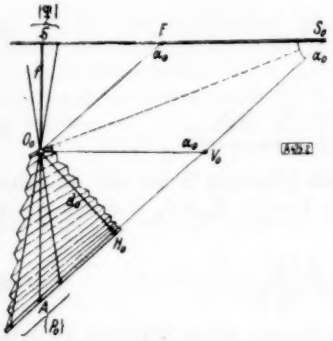


Bild 2 (links). Zwischenphoto und Urzeichnung.

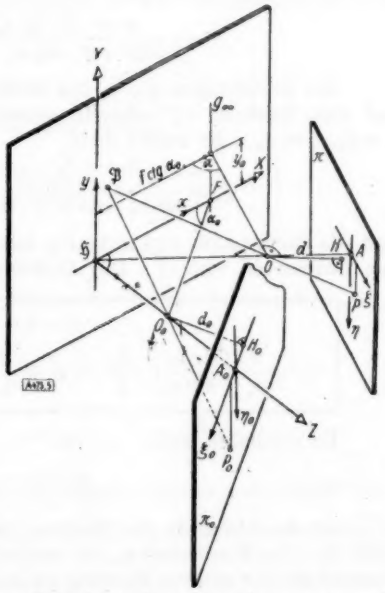


Bild 3 (links). Zwischenphoto und Affinbild.

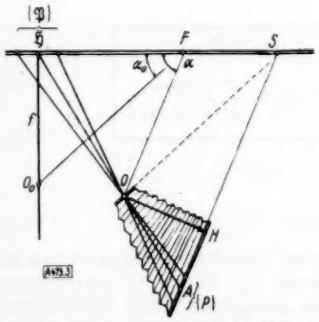


Bild 5 (rechts). Der Zusammenhang der Aufnahmedaten.

photo $\{\mathfrak{P}\}$ enthält und dessen Y-Achse parallel zu der Verschwindungsgeraden g_∞ im Abstand $f \cdot \operatorname{ctg} a_0$ verläuft. Die Zentren O_0 und O der von diesem Zwischenbild herstellbaren Photos $\{P_0\}$ und $\{P\}$ haben die Koordinaten $O_0(X=0, Y=0, Z=f)$ und $O(X=X_0, Y=Y_0, Z=Z_0)$. Die Neigungswinkel der beiden Plattenebenen Π_0 und Π seien a_0 und a, die Bildweiten d_0 und d. Gemäß der Affinitätsforderung müssen die Verschwindungsebenen der beiden Aufnahmen die Verschwindungsgerade g_∞ enthalten, d. h. es muß

$$X_0 = f \cdot \operatorname{ctg} a_0 - Z_0 \cdot \operatorname{ctg} a \quad \text{oder} \quad X_0 \cdot \sin a + Z_0 \cdot \cos a = f \cdot \operatorname{ctg} a_0 \cdot \sin a \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

sein. In den Bildebenen Π_0 bzw. Π werden Koordinatenkreuze ξ_0, η_0 bzw. ξ, η benutzt, deren Ursprung der Punkt A_0 bzw. A ist, der als Bild des Hauptpunktes $\mathfrak{H}$ des Zwischenphotos $\{\mathfrak{P}\}$ entsteht. Die η_0- bzw. η-Achse verläuft parallel zur Verschwindungsgeraden g_∞, die ξ_0- bzw. ξ-Achse windschief-senkrecht zu ihr.

Die Bildebene Π hat die Gleichung

$$\sin a \cdot (X - X_0) + \cos a \cdot (Z - Z_0) = d.$$

Der Strahl $\overrightarrow{\mathfrak{P}O}$ von einem Punkt $\mathfrak{P}(X=x, Y=y, Z=0)$ der XY-Ebene durch das Zentrum $O(X_0, Y_0, Z_0)$ trifft die Plattenebene Π im Bildpunkt P mit den Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} X &= X_0 + \frac{d \cdot (X_0 - x)}{(X_0 - x) \cdot \sin a + Z_0 \cdot \cos a}, \\ Y &= Y_0 + \frac{d \cdot (Y_0 - y)}{(X_0 - x) \cdot \sin a + Z_0 \cdot \cos a}, \\ Z &= Z_0 + \frac{d \cdot Z_0}{(X_0 - x) \cdot \sin a + Z_0 \cdot \cos a} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wird als Sonderfall an Stelle des allgemeinen Punktes $\mathfrak{P}$ der Hauptpunkt $\mathfrak{H}\,(x=0, y=0)$ in $\{\mathfrak{P}\}$ gewählt, so wird man auf den Ursprung $A\,(X_A, Y_A, Z_A)$ des $\xi\eta$-Systems in der Ebene II geführt. Es ist demnach

$$\left.\begin{aligned} X_A &= X_0 + \frac{d\cdot X_0}{X_0\cdot\sin a + Z_0\cdot\cos a},\\ Y_A &= Y_0 + \frac{d\cdot Y_0}{X_0\cdot\sin a + Z_0\cdot\cos a},\\ Z_A &= Z_0 + \frac{d\cdot Z_0}{X_0\cdot\sin a + Z_0\cdot\cos a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Plattenkoordinaten ξ, η des Punktes P in II sind

$$\xi = \frac{X_A - X}{\cos a} = \frac{Z - Z_A}{\sin a}, \quad \eta = Y_A - Y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4);$$

sie ergeben sich nach (1), (2) und (3) zu

$$\xi = \frac{x\cdot d\cdot Z_0\cdot\operatorname{tg} a_0}{f\cdot\sin^2 a\,(f\cdot\operatorname{ctg} a_0 - x)}, \quad \eta = d\cdot\frac{y\cdot f - x\cdot Y_0\cdot\operatorname{tg} a_0}{f\cdot\sin a\,(f\cdot\operatorname{ctg} a_0 - x)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Die Koordinaten ξ_0, η_0 des Bildpunktes P_0 in II_0, der als Bild von $\mathfrak{P}$ bei der Aufnahme mit dem Zentrum O_0 entsteht, erhält man aus (5) für $X_0 = Y_0 = 0$, $Z_0 = f$, $a = a_0$, $d = d_0$, $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$. Es ergibt sich

$$\xi_0 = \frac{d_0\cdot x}{\sin a_0\cdot\cos a_0\,(f\cdot\operatorname{ctg} a_0 - x)}, \quad \eta_0 = \frac{d_0\cdot y}{\sin a_0\,(f\cdot\operatorname{ctg} a_0 - x)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

und die Elimination von x und y aus (5) und (6) liefert die gesuchte affine Bindung zwischen den Ebenen II_0 und II. Die Ausrechnung liefert

$$\boxed{\begin{gathered} \xi = a_1\cdot\xi_0, \quad \eta = a_2\cdot\xi_0 + b_2\cdot\eta_0;\\ a_1 = \frac{d}{d_0}\cdot\left(\frac{\sin a_0}{\sin a}\right)^2\cdot\frac{Z_0}{f}, \quad a_2 = \frac{d}{d_0}\cdot\left(\frac{\sin a_0}{\sin a}\right)\cdot\left(-\frac{Y_0}{f}\cdot\sin a_0\right), \quad b_2 = \frac{d}{d_0}\cdot\left(\frac{\sin a_0}{\sin a}\right) \end{gathered}} \quad \ldots \quad (7).$$

Es verhalten sich

$$a_1 : b_2 = \frac{Z_0}{\sin a} : \frac{f}{\sin a_0} = \overline{OF} : \overline{O_0F},$$

d. h. wie die Abstände der Zentren O und O_0 von der gemeinsamen Verschwindungsgeraden g_∞ (Bild 4). Der Koeffizient a_2 ist proportional der Höhenverschiebung Y_0. Die in (7) gewonnene Sonderform der affinen Bindung zwischen II_0 und II ist durch die geeignete Wahl der Plattenkoordinaten erreicht; eine zusätzliche Verschiebung und Drehung einer Platte in ihrer Ebene führt auf die allgemeinste Form der Affinität.

5. Die allgemeinen Formeln (7) der affinen Doppel-Photographie lassen folgende praktisch wesentlichen Sonderfälle erkennen.

a) Im Sonderfall $a_0 = 0$ und damit auch $a = 0$ ergeben sich ähnliche bzw. kongruente Abbildungen. In der Tat ist

$$\lim_{a,\,a_0\to 0}\frac{\sin a_0}{\sin a} = \frac{f}{Z_0},$$

also

$$\xi = \frac{d}{d_0}\cdot\frac{f}{Z_0}\cdot\xi_0, \quad \eta = \frac{d}{d_0}\cdot\frac{f}{Z_0}\cdot\eta_0.$$

b) Ist $a_0 \neq 0$, so wird die Affinität zur Ähnlichkeit für $a_1 = b_2$, $a_2 = 0$. Das tritt ein für

$$\overline{OF} = \frac{Z_0}{\sin a} = \frac{f}{\sin a_0} = \overline{O_0F}, \quad Y_0 = 0.$$

Der geometrische Ort der Objektiv-Zentren O ist in diesem Falle der Kreis um F durch O_0 (Bild 4[1])). Bei jeder solchen Aufnahmelage ist wie eben

$$\xi = \frac{d}{d_0}\cdot\frac{f}{Z_0}\cdot\xi_0, \quad \eta = \frac{d}{d_0}\cdot\frac{f}{Z_0}\cdot\eta_0.$$

[1]) Vgl. U. Graf: Über das Photo eines Photos, Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 183 bis 189.

c) Für $Y_0 = 0$, $\alpha = \alpha_0$ ist das Aufnahmegerät ohne Höhenänderung in seiner Verschwindungsebene verschiebbar; die Bahn von O ist die Gerade $O_0 F$ (Bild 4). In diesem Falle ist

$$\xi = \frac{d}{d_0} \cdot \frac{Z_0}{f} \cdot \xi_0, \qquad \eta = \frac{d}{d_0} \cdot \eta_0 .$$

Wird das so entstandene Bild noch im Maßstab $d : d_0$ vergrößert, so hat man in der Transformation

$$\xi = \frac{Z_0}{f} \cdot \xi_0, \qquad \eta = \eta_0$$

denjenigen Sonderfall der Affinität vor sich, der, durch den Parallelschatten realisiert, in der Darstellenden Geometrie eine besondere Rolle spielt[2]).

6. Bei der praktischen Durchführung des geschilderten affinen Doppel-Photo-Verfahrens könnte der Umstand erschwerend wirken, daß das auf der Plattenebene II erzeugte Bild weit von dem Hauptpunkt H in II entfernt liegt. Erstrebenswert ist es, das Bild A des Hauptpunktes $\mathfrak{H}$ im Zwischenphoto $\{\mathfrak{P}\}$ in die Nähe des Hauptpunktes H der Plattenebene II fallen zu lassen.

Die Raumkoordinaten X_H, Y_H, Z_H von H sind

$$X_H = X_0 + d \cdot \sin\alpha, \qquad Y_H = Y_0, \qquad Z_H = Z_0 + d \cdot \cos\alpha,$$

und nach (1) und (4) ergeben sich die Plattenkoordinaten von H zu

$$\left.\begin{aligned} \xi_H &= d \cdot \frac{X_0 \cdot \cos\alpha - Z_0 \cdot \sin\alpha}{X_0 \cdot \sin\alpha + Z_0 \cdot \cos\alpha} = d \cdot \frac{X_0 \cdot (f \cdot \operatorname{ctg}\alpha_0 - X_0) - Z_0^2}{Z_0 \cdot f \cdot \operatorname{ctg}\alpha_0}, \\ \eta_H &= d \cdot \frac{Y_0}{X_0 \cdot \sin\alpha + Z_0 \cdot \cos\alpha} = \frac{d}{f} \cdot \operatorname{tg}\alpha_0 \cdot \frac{Y_0}{Z_0} \cdot \sqrt{Z_0^2 + (f \cdot \operatorname{ctg}\alpha_0 - X_0)^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Forderung $\xi_H = \text{const}$ liefert als geometrischen Ort für die Objektivzentren $O(X_0, Y_0, Z_0)$ den Zylinder (Bild 6)

$$X_0^2 + Z_0^2 - X_0 \cdot f \cdot \operatorname{ctg}\alpha_0 + Z_0 \cdot \frac{\xi_H}{d} \cdot f \cdot \operatorname{ctg}\alpha_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

oder

$$\left(X_0 - \frac{1}{2} f \cdot \operatorname{ctg}\alpha_0\right)^2 + \left(Z_0 + \frac{1}{2} \frac{\xi_H}{d} f \cdot \operatorname{ctg}\alpha_0\right)^2 = \frac{1}{4} f^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{\xi_H}{d}\right)^2\right],$$

der die Y_0-Achse und die Verschwindungsgerade g_∞ als Mantellinien enthält und dessen Grundkreis in der $X_0 Z_0$-Ebene über der Strecke $\overline{\mathfrak{H} F}$ einen Bogen mit dem Peripheriewinkel $\frac{\pi}{2} + \varphi$ aufspannt, sofern

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi_H}{d}$$

der auf die Bildweite d bezogene zu ξ_H gehörige Abweichwinkel ist.

Die Forderung $\eta_H = \text{const}$ liefert als geometrischen Ort für die Objektivzentren $O(X_0, Y_0, Z_0)$ ein gerades Konoid mit der Verschwindungsgeraden g_∞ als Achse (Bild 7). Die geradlinigen Erzeugenden stehen senkrecht auf g_∞ und durchstoßen den Zylinder um die Achse g_∞ mit $\overline{\mathfrak{H} F} = f \cdot \operatorname{ctg}\alpha_0$ als Halbmesser in einer Ellipse, die aus dem Zylinder von der Ebene

$$Y_0 = \operatorname{tg}\psi \cdot Z_0$$

ausgeschnitten wird, sofern

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta_H}{d}$$

wieder der auf die Bildweite d bezogene zu η_H gehörige Abweichwinkel ist. Die übliche Parameterdarstellung dieses Konoids lautet

$$X_0 = f \cdot \operatorname{ctg}\alpha_0 - u \cdot \cos v, \qquad Y_0 = f \cdot \operatorname{ctg}\alpha_0 \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot \sin v, \qquad Z_0 = u \cdot \sin v \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

wobei v der Winkel der Erzeugenden gegen die $X_0 Y_0$-Ebene und u die Länge der Erzeugenden sind.

[2]) Ein Verfahren, Parallelprojektionen mit einem Photogerät durch gewisse Abblendungen zu erzeugen, beschreibt E. Gotthardt: Zur Frage der Projektionszentren in der Bildmessung; Bildmessg. u. Luftbildwes. Bd. 16 (1941), S. 97/98. Damit können auch räumliche Gegenstände parallelprojiziert abgebildet werden, jedoch sind die Dinggrößen auf einen zylinderförmigen Raum vom Durchmesser des Objektives beschränkt.

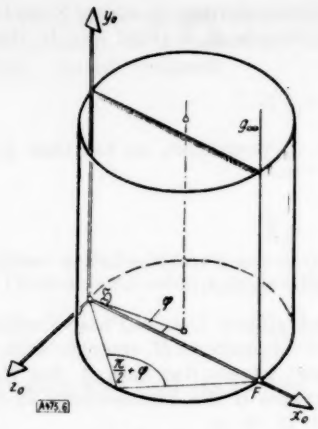


Bild 6. Der Zylinder $\xi_H = d \cdot \operatorname{tg} \varphi = \text{const}$.

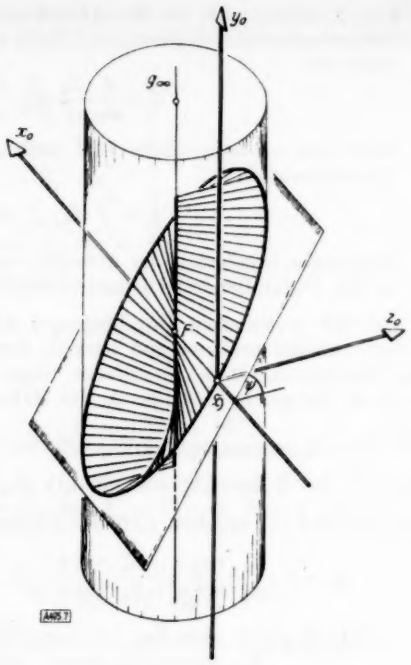


Bild 7 (rechts). Das Konoid $\eta_H = d \cdot \operatorname{tg} \psi = \text{const}$.

Die vollständige Fläche, die sich für $|\eta_H| = \text{const}$ durch rückwärtige Verlängerung der Erzeugenden (also durch zusätzliche Spiegelung des Konoids in Bild 7 an der $X_0\,Y_0$-Ebene) ergibt, ist eine Regelfläche vierter Ordnung mit der Gleichung

$$(X_0 - f \cdot \operatorname{ctg} a_0)^2 \cdot Y_0^2 + Y_0^2\, Z_0^2 - f^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 a_0 \cdot \operatorname{tg}^2 \psi \cdot Z_0^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Nach der Einteilung von R. Sturm[3]) ist sie von 7. Art; sie besitzt die doppelt-zählende Verschwindungsgerade g_∞ und die doppelt-zählende unendlich ferne Gerade der $X_0\,Z_0$-Ebene als Leitgeraden und in der X_0-Achse eine Doppel-Erzeugende. Jede Ebene durch die X_0-Achse schneidet die Fläche außerdem in einer Ellipse, getragen von einem Zylinder um g_∞ als Achse, dessen Halbmesser proportional zu dem Anstieg der Schnittebene gegen die $X_0\,Y_0$-Ebene ist; der Proportionalitätsfaktor ist $f \cdot \operatorname{ctg} a_0 \cdot \operatorname{tg} \psi$.

Als geometrischer Ort der Objektivzentren $O(X_0, Y_0, Z_0)$ für alle Aufnahmen, bei denen die Hauptpunktkoordinaten ξ_H, η_H fest bleiben, ergibt sich die Schnittkurve des Zylinders (9) mit dem Konoid (10), die in Bild 8 für $Y_0 \gtrless 0$ gemäß dieser Erzeugung konstruiert ist. (Für die affine Doppel-Photographie ist nur der Kurventeil $Z_0 > 0$ von Bedeutung.) Die Parameterdarstellung der Kurve lautet nach (9) und (10)

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= f \cdot \operatorname{ctg} a_0 \cdot \left\{1 - \frac{\cos v}{\cos \varphi} \cdot \cos (v + \varphi)\right\}, \\ Y_0 &= f \cdot \operatorname{ctg} a_0 \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot \sin v, \\ Z_0 &= f \cdot \operatorname{ctg} a_0 \cdot \frac{\sin v}{\cos \varphi} \cdot \cos (v + \varphi) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12),$$

wobei v die oben erklärte Bedeutung hat. Diese Kurve vierter Ordnung ist der wesentliche Bestandteil der Gesamtdurchdringungskurve achter Ordnung der Regelfläche (11) und des Zylinders (9), die außerdem noch die doppeltzählende Gerade g_∞ und das konjugiert-imaginäre Geradenpaar $X_0^2 + Z_0^2 = 0$ der unendlich fernen Ebene enthält.

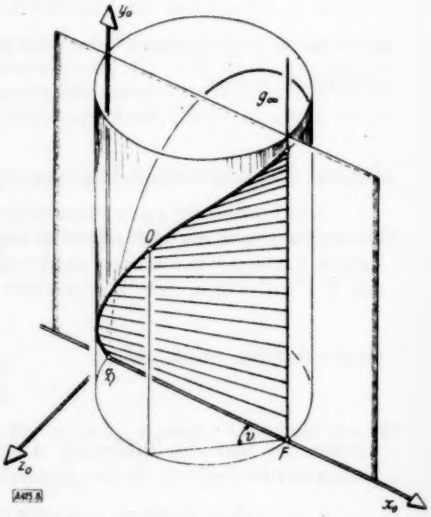


Bild 8. Die Raumkurve $\xi_H = \text{const}$, $\eta_H = \text{const}$ als Durchdringung von Zylinder und Konoid.

[3]) R. Sturm: Liniengeometrie I, Leipzig 1892, S. 52 bis 61.

Die Kurve (12) läßt sich als der Schnitt des Zylinders (9) mit dem Rotationsellipsoid

$$\frac{(X_0 - X_M)^2}{a^2} + \frac{Y_0^2}{b^2} + \frac{(Z_0 - Z_M)^2}{a^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

$$a = \frac{f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_0}{\cos \varphi}, \quad b = f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \psi, \quad X_M = f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_0, \quad Z_M = -f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

erzeugen und erweist sich so als eine aus der konstruktiven Technik geläufige Durchdringungskurve. Die Rotationsachse ist die Zylindermantellinie, die der Y_0-Achse diametral gegenüberliegt. Ellipsoid und Zylinder berühren einander im Punkte $\mathfrak{H}$, einem Doppelpunkt der Durchdringungskurve. Die Scheitel des Ellipsoids liegen in Höhe der höchsten und tiefsten Erzeugenden des Konoids (10).

Das Büschel von Flächen zweiter Ordnung durch die Kurve (12) enthält außer dem Kreiszylinder (9) noch den parabolischen Zylinder

$$Y_0^2 = 2p \cdot (X_0 \cdot \cos \varphi - Z_0 \cdot \sin \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

dessen Scheitelmantellinie die Tangente in $\mathfrak{H}$ an den Grundkreis des Zylinders (9) und dessen Parameter

$$2p = f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_0 \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \psi$$

ist. Die Raumkurve (12) läßt sich daher als Durchdringung der Zylinder (9) und (14) gewinnen (Bild 9).

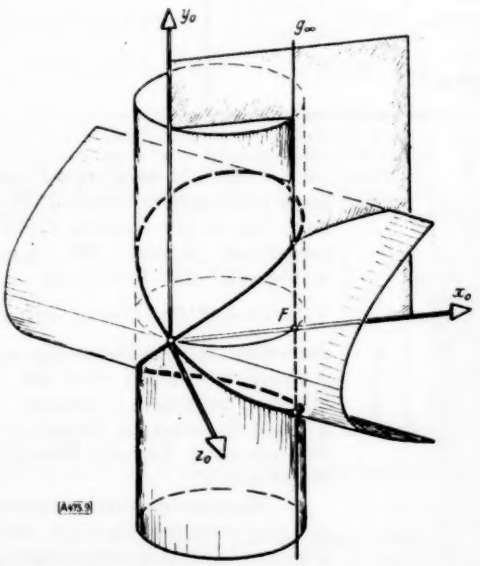


Bild 9. Die Raumkurve $\xi_H = \text{const}$, $\eta_H = \text{const}$ als Durchdringung von geradem Kreiszylinder und parabolischem Zylinder.

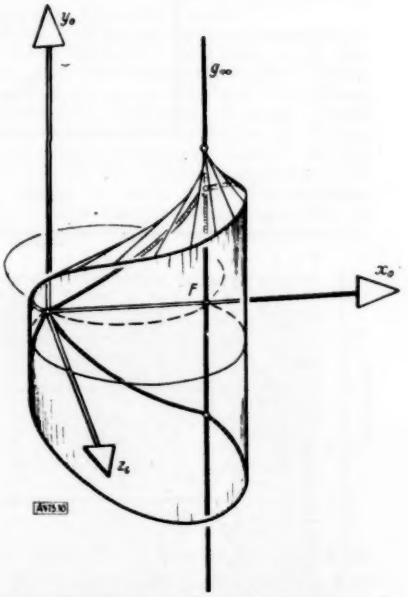


Bild 10. Der Raumteil $|\xi_H| \leqq \text{const}$, $|\eta_H| \leqq \text{const}$.

Als Ergebnis der Überlegung folgt:

Soll bei dem affinen Doppelphoto-Verfahren das Bild A des Hauptpunktes $\mathfrak{H}$ im Zwischenphoto $\{\mathfrak{P}\}$ auf der Plattenebene H innerhalb eines Rechtecks mit den Seiten $2\xi_H$ und $2\eta_H$ um den Plattenhauptpunkt H als Mittelpunkt liegen, so muß das Objektivzentrum innerhalb des in Bild 10 wiedergegebenen Raumteiles liegen. Er wird begrenzt von einem Zylindermöndchen über $\overline{\mathfrak{H}F}$ als Sehne, wobei die bestimmenden Peripheriewinkel der Kreisbogen $\frac{\pi}{2} \pm \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi_H}{d}$ sind, und zwei Konoiden (10) mit Grenzerzeugenden in den Höhen $Y_0 = \pm \overline{\mathfrak{H}F} \cdot \frac{\eta_H}{d}$. Die Kurvenkanten sind Teile der geschilderten Raumkurven vierter Ordnung.

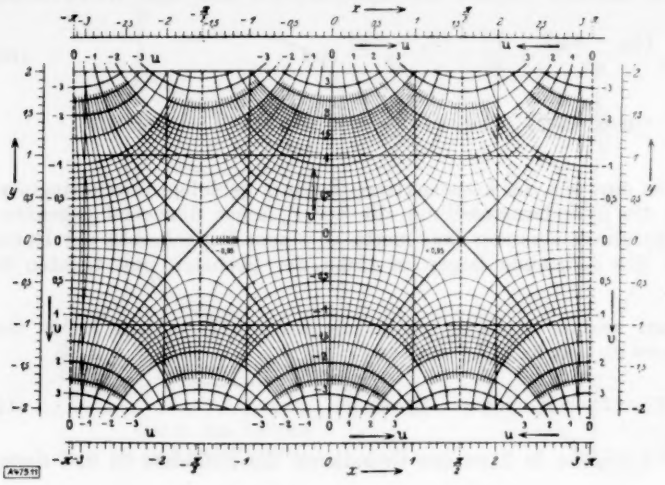


Bild 11. Die Urzeichnung (Seitenverhältnis 9 : 14).

Die phototechnisch zugängliche Lage dieses Raumteiles erweist die praktische Durchführbarkeit des geschilderten Doppelphoto-Verfahrens.

Für $\xi_H = \eta_H = 0$ fällt das Bild von $\mathfrak{H}$ in den Hauptpunkt H selbst. In diesem Falle entartet der Raumteil zu dem Kreis

$$X_0^2 + Z_0^2 - X_0 \cdot f \cdot \operatorname{ctg} \alpha_0 = 0, \qquad Y_0 = 0,$$

der $\overline{\mathfrak{H} F}$ als Durchmesser besitzt, ein Sachverhalt, der elementargeometrisch unmittelbar einleuchtet (Bild 4). Bei der Einhaltung dieser besonderen Aufnahmelage nehmen die allgemeinen Formeln (7) die Gestalt an:

$$\xi = m \cdot \xi_0, \quad \eta = n \cdot \eta_0;$$
$$m = \left(\frac{d}{d_0} \cdot \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha}\right) \cdot \cos \alpha_0 \cdot \cos \alpha, \quad n = \left(\frac{d}{d_0} \cdot \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha}\right); \qquad \ldots\ldots\ldots (15).$$
$$\frac{m}{n} = \cos \alpha_0 \cdot \cos \alpha < 1$$

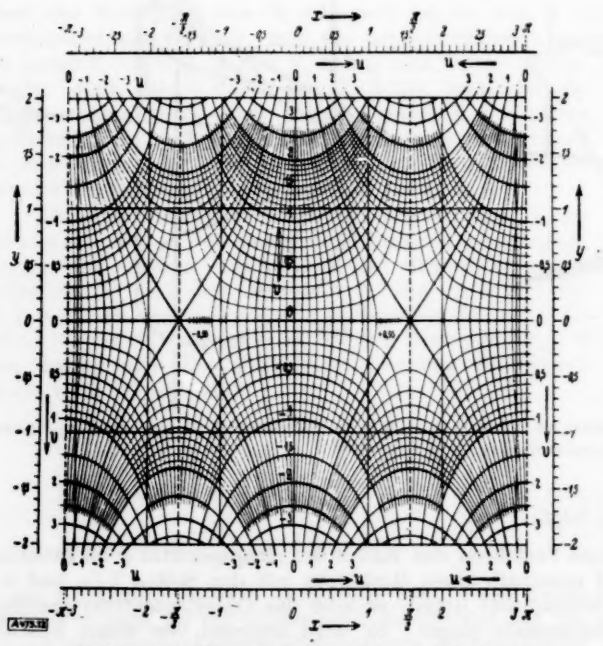


Bild 12. Die Affinreproduktion (Seitenverhältnis 1 : 1).

7. Bild 11 zeigt eine Urzeichnung im Seitenverhältnis 9 : 14, die nach (15) in ein Quadrat (Bild 12) umgeformt wurde. Mit $\alpha_0 = 40°$ war gemäß der Forderung

$$m : n = 9 : 14 = \cos \alpha_0 \cdot \cos \alpha$$

der zweite Neigungswinkel $\alpha = 33°$. Aufnahmetechnisch wird das Verfahren besonders bequem für $\alpha = \alpha_0$, da man in diesem Falle mit nur einer Kammer-Einstellung auskommt[4]).

Stets lassen sich Zeichnungen und Kurvenbilder, die nicht wie metrische Konstruktionszeichnungen an feste Maßstäbe gebunden sind, photomechanisch auf beliebige Rechteckformate bringen; darüber hinaus kann man durch iteriertes Photographieren nach (7) jede ebene affine Transformation erzeugen. 475

[4]) Vgl. Handbuch der modernen Reproduktionstechnik, Frankfurt a. M. 1936, Bd. I, S. 141.

KLEINE MITTEILUNGEN

Graphische Lösung von Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

1. Fragestellung.

Das im folgenden beschriebene Verfahren ist ein Näherungsverfahren; es wird der Differentialgleichung (1) eine Differenzengleichung (4) gegenübergestellt und das zugehörige Differenzen-Randwertproblem graphisch gelöst [1]).

Das vorgelegte Randwertproblem habe die Differentialgleichung

$$Y'' + r(x)\,Y' + q(x)\,Y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und die Randbedingungen

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

An Stelle der zweiten Randbedingung kann auch $y'(b) = \gamma$ treten. Über kompliziertere Randbedingungen vgl. Nr. 4.

Es seien α, β, γ gegebene Konstanten, a, b endliche Abszissen mit $a < b$, und $r(x)$, $q(x)$, $f(x)$ gegebene stetige Funktionen von x. Striche bei Y bedeuten Ableitungen nach x.

Das Randwertproblem wird angenähert mit dem Differenzenverfahren gelöst: bei Teilung des Intervalls a, b in n gleiche Teile der Länge $h = \dfrac{b-a}{n}$ mit den Teilungspunkten

$$x_k = a + k\,h = a + k\,\frac{b-a}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

werden Funktionswerte an der Stelle x_k durch Anhängen des Index k bezeichnet, z. B. $\varphi_k = \varphi(x_k)$; ferner bedeutet y_k einen Näherungswert für den Wert der Lösungsfunktion $Y(x)$ an der Stelle x_k. Der Differentialgleichung wird die Differenzengleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + r_i\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \\ &\qquad + q_i\,y_i - f_i = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3)$$

oder mit der Abkürzung $\varrho_i = \dfrac{r_i\,h}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1} + \varrho_i\,(y_{i+1} - y_{i-1}) \\ &\quad + (q_i\,y_i - f_i)\,h^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

gegenübergestellt. Als Randbedingungen kommen

$$y_0 = \alpha, \qquad y_n = \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

hinzu. Die Gl. (4) (5) bilden das zu lösende Differenzen-Randwertproblem, nämlich $(n+1)$ lineare Gleichungen für ebenso viele Unbekannte $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

2. Die Sehnenfestpunkte.

Man könnte das Randwertproblem (4), (5) lösen, indem man aus der ersten Gl. (4) y_2 durch y_1 ausdrückt (y_0 ist ja bekannt), dann aus der zweiten Gl. (4) y_3 durch y_1 ausdrückt usw. Hat man auch y_n als lineare Funktion von y_1 dargestellt, so liefert die Randbedingung für y_n den Wert von y_1.

Es erscheinen so alle y_k als lineare Funktionen von y_1

$$y_k = a_k\,y_1 + b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit a_k, b_k als Konstanten. Denkt man sich bei festem $y_0 = \alpha$ für mehrere verschiedene Werte von y_1 nach (4) die jeweils zugehörigen Werte von $y_2, y_3, \ldots, y_k$ berechnet und dargestellt, Bild 1, so

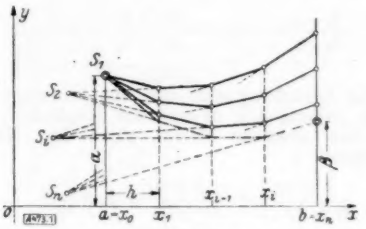


Bild 1.

werden auf den zu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gehörigen Ordinaten ähnliche Punktreihen ausgeschnitten, d. h. aber die Verbindungsgeraden entsprechender Teilpunkte schneiden sich in einem Punkt. Insbesondere schneiden sich die Verbindungsgeraden der Punkte (x_{i-1}, y_{i-1}) und (x_i, y_i) in einem Punkt, der als Sehnenfestpunkt S_i bezeichnet werde.[2])

Ferner werden noch die Tangentenfestpunkte T_i eingeführt. Als „Tangente" im Punkt x_i, y_i wird die Parallele zur Verbindungslinie der Punkte (x_{i-1}, y_{i-1}) und (x_{i+1}, y_{i+1}) definiert. T_i ist dann der Schnittpunkt aller Tangenten in x_i, y_i. Greift man unter den zu den verschiedenen y_i-Werten gehörigen Linienzügen denjenigen heraus, für den der Punkt (x_i, y_i) auf der Verbindungsgeraden von S_i und S_{i+1} liegt, so stellt diese Verbindungsgerade zugleich die Tangente im Punkt (x_i, y_i) dar, d. h. S_i, S_{i+1}, T_i liegen auf einer Geraden. Bild 2.

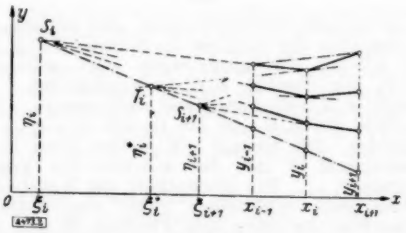


Bild 2.

3. Konstruktion der Sehnenfestpunkte.

Der erste Sehnenfestpunkt S_1 ist der gegebene Punkt (x_0, y_0). Wir geben an, wie man bei bekanntem Festpunkt S_i den nächsten Festpunkt S_{i+1} konstruieren kann. Damit ist nämlich das Randwertproblem (4), (5) leicht lösbar: Hat man alle Sehnenfestpunkte $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konstruiert, so kennt man die letzte Sehne als Verbindungslinie der Punkte S_n und (x_n, y_n) und kann dann die vorletzte Sehne und so von rückwärts den ganzen Sehnenzug zeichnen. Vgl. in Bild 1, den strichpunktierten Linienzug.

Es seien ξ_i, η_i die Koordinaten des Sehnenfestpunktes S_i, entsprechend ξ_{i+1}, η_{i+1} die von S_{i+1},

[1]) Der Aufsatz ist unter Betonung geometrischer Gesichtspunkte eine leichte Verallgemeinerung einer Arbeit von R. Kappus: „Graphische Lösung der Differentialgleichung $Y'' + \varphi(x)\,Y = f(x)$ bei beliebigen Anfangs- und Randbedingungen", Z. VDI Bd. 87 (1943), S. 26 bis 28, in welcher über ein Verfahren von J. Drymael: J. roy. aeron. Soc. Bd. 45 (1941) Nr. 362, S. 51 bis 66, referiert wird.

[2]) Festpunkte werden auch verwendet zur graphischen Behandlung der Clapeyronschen Dreimomentengleichungen, vgl. P. Funk, Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Berlin 1920, S. 44.

Bild 2; die drei Punkte (x_{i-1}, y_{i-1}) (x_i, y_i) und S_i liegen auf einer Geraden, d. h. Bild 2.

$$y_i - y_{i-1} = h\frac{y_i - \eta_i}{x_i - \xi_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Genau so folgt:

$$y_{i+1} - y_i = h\frac{y_i - \eta_{i+1}}{x_i - \xi_{i+1}} \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Mit Hilfe von (6) und (7) kann man y_{i-1} und y_{i+1} aus der Differenzengleichung (4) eliminieren und man erhält

$$\left.\begin{aligned} h\frac{y_i - \eta_{i+1}}{x_i - \xi_{i+1}}(1+\varrho_i) + h\frac{y_i - \eta_i}{x_i - \xi_i}(-1+\varrho_i) \\ + (\varphi_i y_i - f_i)\,h^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (8).$$

Diese Gleichung soll nun für beliebige Werte von y_i gelten, d. h. es muß der Koeffizient von y_i und das absolute Glied, jedes für sich verschwinden:

$$\frac{1+\varrho_i}{x_i - \xi_{i+1}} + \frac{-1+\varrho_i}{x_i - \xi_i} + \varphi_i h = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

$$\eta_{i+1}\frac{1+\varrho_i}{x_i - \xi_{i+1}} + \eta_i\frac{-1+\varrho_i}{x_i - \xi_i} + f_i h = 0 \quad . \quad . \quad (10).$$

Bei bekanntem Sehnenfestpunkt S_i kann man hiernach den nächsten Festpunkt S_{i+1} berechnen, nämlich aus (9) die Koordinate ξ_{i+1} und dann aus (10) η_{i+1}. Die Gleichungen lassen eine einfache graphische Konstruktion, Bild 3, zu. Außer

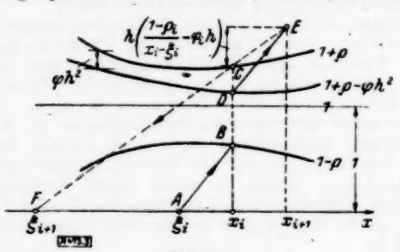


Bild 3.

der x-y-Ebene verwendet man eine Hilfsfigur, in welcher über der x-Achse die Kurven $1-\varrho$, $1+\varrho$ und $1+\varrho-\varphi h^2$ aufgetragen sind, welche bei $x = x_i$ die Punkte B, C, D ausschneiden. Vom Punkte $A\,(x = \xi_i)$ ausgehend, zieht man zu AB die Parallele durch D, die die Gerade $x = x_{i+1}$ in E schneidet. Die Gerade CE liefert dann in dem Schnittpunkt F mit der x-Achse die gesuchte Abszisse ξ_{i+1}. Die Richtigkeit der Konstruktion rechnet man unmittelbar nach; der Ordinatenunterschied zwischen den Punkten D und E ist $h\frac{1-\varrho_i}{x_i - \xi_i}$, der zwischen den Punkten C und E also $h\left(\frac{1-\varrho_i}{x_i - \xi_i} - \varphi_i h\right)$ und dieser soll nach (9) gleich $h\left(\frac{1+\varrho_i}{x_i - \xi_{i+1}}\right)$ sein. Für die geometrische Konstruktion der noch fehlenden Ordinate η_{i+1} empfiehlt es sich, Bild 4, durch Ziehen der Parallele CG zur Geraden AB eine Abszisse ζ_i mit

$$\frac{x_i - \xi_i}{1-\varrho_i} = \frac{x_i - \zeta_i}{1+\varrho_i}$$

zu konstruieren. Dann lassen sich (9) und (10) in der Gestalt schreiben

$$\frac{1}{x_i - \xi_{i+1}} - \frac{1}{x_i - \zeta_i} = -\varphi_i\frac{h}{1+\varrho_i}$$

$$\eta_{i+1}\frac{1}{x_i - \xi_{i+1}} - \eta_i\frac{1}{x_i - \zeta_i} = -f_i\frac{h}{1+\varrho_i}.$$

Division dieser beiden Gleichungen liefert

$$\left.\begin{aligned} \frac{f_i}{\varphi_i} &= \frac{\eta_{i+1}(x_i - \zeta_i) - \eta_i(x_i - \xi_{i+1})}{(x_i - \zeta_i) - (x_i - \xi_{i+1})} \\ &= \eta_{i+1} + \frac{(\eta_i - \eta_{i+1})(x_i - \xi_{i+1})}{\zeta_i - \xi_{i+1}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (11).$$

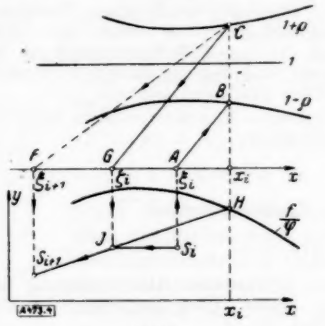


Bild 4.

Zeichnet man sich in der x-y-Ebene die Kurve für $\frac{f}{\varphi}$, die bei $x = x_i$ durch den Punkt H geht, Bild 4, und bezeichnet man den Punkt mit den Koordinaten ζ_i, η_i mit J, so liegen nach Gl. (11) die Punkte H, J und der gesuchte Sehnenfestpunkt S_{i+1} auf einer Geraden. Dieser ist also jetzt völlig festgelegt. Der Gang der Konstruktion ist durch Pfeile angedeutet. Im Falle $r(x) \equiv 0$, also $\varrho_i = 0$ vereinfacht sich die Konstruktion und man erhält eine Figur wie bei R. Kappus a. a. O.

4. Andere Randbedingungen.

Ist an Stelle von $y(b) = \beta$ die Randbedingung $y'(b) = \gamma$ vorgegeben, so braucht man den letzten Tangentenfestpunkt T_n, um durch ihn die letzte Strecke des Polygonzuges für y mit der vorgegebenen Steigung zeichnen und dann die übrigen Strecken des Lösungszuges wie früher von rückwärts her ermitteln zu können. Wir beschreiben allgemein die Konstruktion von T_i, wenn S_i und S_{i+1} bekannt sind. T_i habe die Koordinaten ξ_i^*, η_i^*. Da nach Nr. 2 S_i, S_{i+1}, T_i auf einer Geraden liegen, genügt es, die Abszisse ξ_i^* zu konstruieren.

Es soll nach der Definition des Tangentenfestpunktes gelten

$$\frac{y_i - \eta_i^*}{x_i - \xi_i^*} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Jetzt wird eine Rechnung gleicher Art durchgeführt, wie sie zu (8) führte. Aus (6) und (12) werden die Differenzen $y_i - y_{i-1}$ und $y_{i+1} - y_i$ berechnet und in die Differenzengleichung (4) eingesetzt. Es entsteht eine in y_i lineare Gleichung, die in y_i identisch gelten soll, es müssen also Absolutglied und Koeffizient von y_i einzeln verschwinden; der Koeffizient von y_i gleich Null gesetzt liefert

$$\frac{x_i - \xi_i^*}{x_i - \xi_i} = \frac{1+\varrho_i}{1 - \frac{\varphi_i}{2}h(x_i - \xi_i)} \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Diese Gleichung kann nach Bild 5 geometrisch gedeutet werden. Zeichnet man über der x-Achse die Kurven für $1+\varrho, 1, 1-\varphi h^2$, die bei $x = x_i$ die Punkte A, B, C ausschneiden, so geht man vom Punkt D mit der Abszisse $x = \xi_i$ aus. Die Parallele zu BD durch den Punkt C trifft die Gerade $x = x_{i+2}$ in E, und die Parallele zu BE durch A schneidet im Punkte F die gesuchte Abszisse ξ_i^* aus.

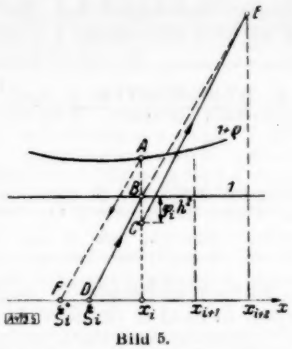


Bild 5.

Bei komplizierteren Randbedingungen, z. B. $y'(b) = \delta \cdot y(b)$, kann man zum Ziel kommen, indem man die Konstruktion zweimal durchführt, also zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung konstruiert und aus ihnen durch Linearkombination eine die Randbedingungen erfüllende Lösung ermittelt.

5. Beispiel.

Bild 6 zeigt die Durchführung eines einfachen analytischen Beispiels mit bekannter exakter Lösung. Das Randwertproblem

$$y'' + \frac{1}{4+x}y' - \left(1+\frac{x}{4}\right)y + \frac{2+x+(1-y^2)\left(1+\frac{x}{4}\right)^2}{1+\frac{x}{4}} = 0$$

$$y(-1) = y(1) = 0$$

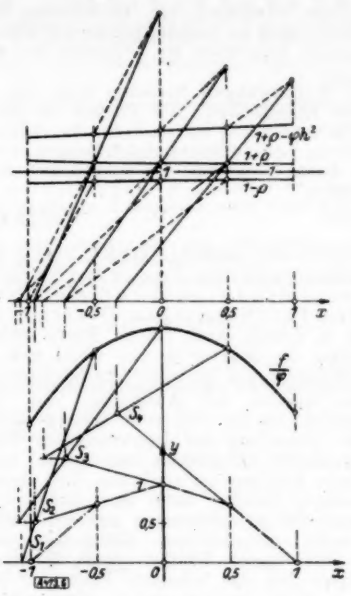


Bild 6.

hat die Lösung $y = 1 - x^2$. Bei der groben Maschenweite $h = \frac{1}{2}$ hat man vom gegebenen Anfangspunkt S_1 $(x = -1; y = 0)$ ausgehend die drei weiteren Sehnenfestpunkte S_2, S_3, S_4 zu konstruieren und erhält in dem strichpunktierten Linienzug die Näherungslösung des Differenzenverfahrens.

Karlsruhe. L. Collatz. 473

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. HORST **VON SANDEN**, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Hannover, Praxis der Differentialgleichungen, eine Einführung. 100 S. m. 20 Abb. Berlin 1943, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. 5 M.

Das vorliegende Buch, das den Inhalt von Vorlesungen wiedergibt, die Verf. seit längerer Zeit an der Techn. Hochschule Hannover hält, behandelt in der Hauptsache Näherungsmethoden zur Lösung von Differentialgleichungen. Der erste Teil beschäftigt sich mit Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Als Methoden zur Lösung von Gleichungen erster Ordnung findet man das Isoklinenverfahren, die beiden Adamsschen Verfahren, die Iteration und das Verfahren von Runge-Kutta. Die erforderlichen Interpolationsformeln, wie die Formeln für die letzte Methode werden nicht abgeleitet, sondern betreffs der Herleitung wird auf andere Bücher verwiesen. Weiter werden für Gleichungen zweiter Ordnung und für Systeme von Gleichungen die zeichnerische Integration und das Adamssche Verfahren behandelt, wie die Lösung durch Potenzreihen.

Im zweiten Teil beschäftigt sich Verf. mit Randwertproblemen bei Differentialgleichungen der Form $y'' + \lambda p(x) y = q(x)$. Zunächst wird an der Gleichung mit konstanten Koeffizienten die Fragestellung erläutert, weiter auf Gleichungen mit variablen Koeffizienten der Ansatz von Rayleigh und die Iterationsmethode angewandt, kurz auf die Greensche Funktion eingegangen und schließlich die Methode von Ritz auseinandergesetzt. Nicht behandelt wird also das Differenzenverfahren, das gelegentlich dann von Nutzen sein kann, wenn man schnell einen Überblick über den Verlauf der Lösung gewinnen will. An einer beträchtlichen Anzahl von Beispielen wird die Anwendung der einzelnen Methoden erläutert. Die Darstellung ist sehr klar und ziemlich ausführlich; ihr kommt überall die reiche Unterrichtserfahrung des Verf. zugute.

Auf einige Einzelheiten sei kurz hingewiesen, z. B. auf die Ausführungen über „exakte" und „Näherungslösungen", wo man hinzufügen möchte, daß diese nur dann als gleichwertig angesehen werden sollten, wenn man den Fehler der Näherungen genügend genau abschätzen kann, was leider oft nicht der Fall ist. — Das Problem der Knickung eines Stabes unter seinem Eigengewicht löst Verf. durch Potenzreihen und sagt dann, daß für diese „Symbole noch nicht eingeführt und Tabellen noch nicht vorhanden (?)" sind. Die Lösung läßt sich durch Besselsche Funktionen darstellen, und zum mindesten die Nullstellen kann man aus Tabellen, z. B. im Jahnke-Emde, entnehmen. — Zu dem mehrfach mit Näherungsmethoden behandelten Beispiel der Schwingung einer Saite mit abschnittsweise konstanter Massenbelegung wäre wohl zu erwähnen, daß sich die Eigenwerte aus einer einfachen transzendenten Gleichung ergeben, so daß man diese leicht eingabeln kann. Zur Ableitung dieser Gleichung ist an Mathematik nur das erforderlich, was Verf. im letzten Abschnitt seines Buches entwickelt. — Das auf S. 70

angegebene Verfahren zur Berechnung höherer Eigenwerte wird an keinem Beispiel erläutert. Ob es praktisch brauchbar ist, erscheint mir zweifelhaft.

Diese Bemerkungen beziehen sich auf nebensächliche Einzelheiten. Als Ganzes ist das Buch vortrefflich geeignet, Interesse für die rechnerische Behandlung von Differentialgleichungen zu wecken und in dieses Teilgebiet der praktischen Analysis einzuführen.

Dresden. Willers. 468

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI,** Prof. a. d. Deutschen Karls-Universität Prag, Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. 3., verb. u. erweit. Aufl. 320 S. Berlin 1942, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 15 M.

Die Determinante ist von Leibniz und Cramer ersonnen worden zur Auflösung von linearen Gleichungen. Es hat sich zwar herausgestellt, daß man die Bedeutung der Determinanten für diese Frage zunächst überschätzt hat, sowohl was ihre begriffliche Klärung als auch was ihre numerische Beherrschung betrifft; dafür aber haben sich die Determinanten an zahlreichen anderen Stellen als nicht mehr entbehrliches Hilfsmittel bewährt. Gerade von dieser Vielfalt ihrer Verwendungsmöglichkeit gibt das bekannte Buch, das jetzt in dritter Auflage vorliegt, einen glänzenden Eindruck. Es wendet sich an Leser, denen eine Einführung, die nur das Nötigste bringt, nicht genügt. Dementsprechend findet man in der zweiten Hälfte des Buches Gegenstände wie: Orthogonale Determinanten, Resultanten und Diskriminanten, lineare und quadratische Formen, Funktionaldeterminanten, Wronskische und Gramsche Determinanten, lineare Integralgleichungen, Elementarteilertheorie.

Das Werk wird gewiß auch in der neuen Auflage seine alte Anziehungskraft zeigen.

Dresden. Rellich. 443

Dr. K. **SCHWIDEFSKY,** wissenschaftl. Mitarbeiter d. Opt. Werke Zeiß, Jena, Einführung in die Luft- und Erdbildmessung. 3. erweiterte u. verbess. Aufl. VI + 176 S. m. 85 Abb., 3 schwarzen und 2 farbigen Tafeln im Text, 1 schwarzen Tafel, 1 farbigen Brille und 2 Stereobildern im Anhang. Leipzig und Berlin 1942, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 7,80 M.

Der Fortschritt in der Entwicklung der Photogrammetrie, diesem neuen besonders für topographische Zwecke wichtigen Meßverfahren ist noch immer recht lebhaft, wie sich aus der bereits nach 2 Jahren erscheinenden weiteren 3. Auflage des Buches von Schwidefsky „Einführung in die Luft- und Erdbildmessung" ergibt. (Siehe Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938) S. 259 und Bd. 20 (1940) S. 240. Die neue Auflage hatte zwar weniger instrumentelle Neuerungen zu berücksichtigen, als solche auf dem Gebiet der mathematischen Grundlagen und der praktischen Anwendung. Die Hauptaufgabe der Photogrammetrie oder die räumliche Doppelpunkteinschaltung wird neu für Schrägaufnahmen behandelt, die gefährlichen Örter bei der Hauptaufgabe sind erwähnt, der Abschnitt über innere Orientierung von Meßkammern und die Fehlertheorie der Aerotriangulation sind vertieft, ferner wurden Abschnitte über Fehlerfortpflanzung in gleichförmigen gestreckten Dreiecksketten und die Drehzerrung (günstigste Netzeinpassung) berücksichtigt. Nach der praktischen Seite neu ist vor allem der Abschnitt über die Nahbildmessung und das Beispiel zur Aerotriangulation. Durch diese wichtigen Neuerungen hat das treffliche Buch an Wert noch gewonnen.

Hannover. Finsterwalder. 457

Dr.-Ing. P. **WERKMEISTER,** o. Prof. em. a. d. Techn. Hochschule Dresden, Vermessungskunde III, Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Topographie. 4. Aufl. (Sammlung Göschen Bd. 862). 147 S. m. 64 Fig. Berlin 1942, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis 1,62 M.

Es ist recht erfreulich, daß es der Verlag de Gruyter & Co. ermöglichen konnte, trotz aller kriegsbedingten Schwierigkeiten nach dem I. Band (Stückmessung und Nivellieren, 7. Auflage) und der Fortsetzung in Band II (Messung von Horizontalwinkeln, Festlegung von Punkten im Koordinatensystem, Absteckungen, 4. Auflage) nunmehr auch den abschließenden III. Teil (Trigonometrische und Barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Topographie) der Vermessungskunde von P. Werkmeister als Band 862 der Sammlung Göschen in 4. Auflage herauszugeben, und zwar in bekannt guter Drucklegung und Ausstattung, so daß den bewährten vorzüglichen Ausführungen des Verfassers trotz der Kriegszeit der verdiente äußere Rahmen in ansprechender Form gesichert ist.

Freiberg-Sa. H. Müller. 456

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. A. **TIMPE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Höhere Mathematik I, II. Autographierte Vorlesungen. 84 u. 130 S. Stuttgart und Berlin 1942, Verlag W. Kohlhammer. Preis brosch. Teil I 3 M, Teil II 3,50 M.

Dr. ROBERT **SAUER,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Aachen, Theoretische Einführung in die Gasdynamik. VII + 146 S. m. 99 Abb. Berlin 1943, Springer-Verlag. Preis brosch. 12 M.

GREGOR **WENTZEL,** Prof. a. d. Univ. Zürich, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder. IV + 209 S. Wien 1943, Verlag Franz Deuticke. Preis brosch. 20 M.

P. **RAETHJEN,** Einführung in die Physik der Atmosphäre, Bd. II, Meteorologische Aerodynamik. (Hamburger Mathematische Einzelschriften, 33. Heft/1942.) VIII + 257 S. m. 57 Abb. Leipzig und Berlin 1942, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 10 M.

NACHRICHTEN

Persönliches.

Gestorben sind:

der o. Prof. der Darstellenden Geometrie an der Universität und der Techn. Hochschule Prag Dr. Karl Mack;

der frühere Abteilungsleiter im Geodätischen Institut in Berlin-Potsdam Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Andreas Galle:

der o. Prof. für Darstellende Geometrie an der Techn. Hochschule Berlin Dr. E. Salkowski.

Dem em. o. Prof. für Elektrotechnik an der Techn. Hochschule Stuttgart Dr.-Ing. e. h., Dr. techn. e. h. F. Emde wurde die Goethe-Medaille verliehen.

Für den Textteil verantwortlich: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. Copyright 1943 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. — Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.